CHAPITRE 0

SERIES FORMELLES

§1. Algèbre des séries formelles à une variable (rappel)

. $\mathbb{K}$ anneau commutatif intègre (en général $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{Z}[\alpha, \beta, \ldots]$, $\mathbb{Q}[\alpha, \beta, \ldots]$, $\mathbb{C}[\alpha, \beta, \ldots]$).

. $\mathbb{K}[t]$ algèbre des *polynômes* à coefficients dans $\mathbb{K}$ à une variable t.
deg P désigne le *degré* de P.

. $\mathbb{K}[[t]]$ algèbre des *séries formelles* à coefficients dans $\mathbb{K}$ à une variable t, c'est-à-dire:

$$\text{série formelle } f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n .$$

$$\text{opérations} \begin{cases} \textit{somme } f + g = h , & a_n + b_n = c_n \\ \textit{produit } f g = h , & c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q \\ \textit{produit par un scalaire } \lambda f = h , & c_n = \lambda a_n . \end{cases}$$

. *Série génératrice* des coefficients a_n de $\mathbb{K}$.

$$\text{ordinaire} \quad \sum_{n\geq 0} a_n t^n ,$$

$$\text{exponentielle} \quad \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!} .$$

. *Ordre* $\omega(f)$ d'une série formelle: plus petit entier n tel que $a_n \neq 0$.

. *Topologie ultramétrique* sur $\mathbb{K}[[t]]$.

Distance : $d(f,g) = \rho^{\omega(f-g)}$ $\quad 0 < \rho < 1$ fixé.

Famille sommable $\sum_{i\in I} f_i(t)$.

Produits infinis $\prod_{i\in I} f_i(t)$.

§2. Substitution

$$f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n ,\ g(t) = \sum_{n\geq 0} b_n t^n \quad \text{avec } b_0 = 0 .$$

Définition: (substitution) $\quad f\circ g(t)$ ou $f(g(t)) = \sum_{n\geq 0} a_n (g(t))^n$.

$f(t) = t$, élément neutre pour la composition "$\circ$".

Série réciproque : $f^{<-1>} = g$, $\ f\circ g(t) = g\circ f(t) = t$.

Lemme: Soit $\mathbb{K}$ un corps et $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ série de $\mathbb{K}[(t)]$ telle que $a_0 = 0$. La série réciproque $f^{<-1>}$ existe ssi $a_1 \neq 0$.

§3. Autres opérations

Pour $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n$,

. *Inverse* . Si $\omega(f) \geq 1$, $\quad \dfrac{1}{1-f} = 1 + f + f^2 + \ldots + f^n + \ldots$

f(t) est inversible ssi $f(0) = a_0$ l'est aussi.

. *Dérivée* . $f'(t)$ ou $\dfrac{df}{dt} = \sum_{n\geq 1} n a_n t^{n-1}$.

. *Primitive*. $\displaystyle\int_0^t f(u)\,du = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}$.

. *Exponentielle* . $\exp(t)$ ou $e^t = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}$.

. *Logarithme* . $\log(1 - t)^{-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n}$.

. *Série binomiale* . $(1 + t)^{\alpha} = \sum_{n\geq 0} \binom{a}{n} t^n = \sum_{n\geq 0} \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1) \frac{t^n}{n!}$,

aussi, $(1 - t)^{-\alpha} = \sum_{n\geq 0} \alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + n - 1) \frac{t^n}{n!}$.

Pour $\omega(f) \geq 1$, c'est-à-dire $a_0 = 0$, on peut définir:

$$\exp f, \qquad \log(1 + f) \qquad \text{et} \qquad (1 + f)^{\alpha} .$$

§4. Séries formelles à plusieurs variables

$$\sum_{n_1,\ldots,n_p} a_{n_1,\ldots,n_p} t_1^{n_1} \ldots t_p^{n_p} = f(t_1,\ldots,t_p) \text{ (ordinaire)}$$

$$\sum_{n_1,\ldots,n_p} a_{n_1,\ldots,n_p} \frac{t_1^{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{t_p^{n_p}}{n_p!} \qquad \text{(notation exponentielle)}$$

$\mathbb{K}[[t_1,\ldots,t_p]]$, algèbre des *séries formelles*.

$\mathbb{K}[t_1,\ldots,t_p]$, sous-algèbre des *polynômes* à coefficients dans $\mathbb{K}$ en variables $t_1, t_2,\ldots,t_p$.

Aussi $\mathbb{K}[[\{t_i\}_{i \in I}]]$, infinité de variables.

Dérivée partielle : $\frac{\partial}{\partial t_i} f(t_1,\ldots,t_p)$.

§5. Monoïde libre

X *alphabet* ; $X = \{a, b, c, \ldots\}$; $x \in X$, *lettre* ; *mot*, $u = x_1 x_2 \ldots x_n$, $x_i \in X$.

X^* *monoïde libre* engendré par X :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{. \textit{produit de 2 mots} :} & u = x_1 \ldots x_n \ , \ v = y_1 \ldots y_m \\ \quad \text{\textit{(concaténation)}} & \\ & uv = x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_m \ . \\ \text{. \textit{élément neutre} :} & e \ , \ \text{\textit{mot vide}} \ . \end{array} \right.$$

Longueur d'un mot $u = x_1 x_2 \ldots x_n$, $|u| = n$. $|u| = \sum_{x \in X} |u|_x$ avec $|u|_x$ le nombre d'occurences de x dans u .

Factorisation $u = u_1 \ldots u_k$ avec $u_i \in X^*$: u_1 *facteur gauche* ; u_k *facteur droit* ; u_i *facteur* .

Langage $L \subseteq X^*$.

Opérations sur les langages: $\cup$ *union* ,
$\cap$ *intersection* ,
$/$ *différence* ,
produit $AB = \{w \in X^*, \ w = uv, \ u \in A, \ v \in B\}$ et
étoile $L^* = \{e\} \cup L \cup L^2 \cup \ldots \cup L^n \cup \ldots$

Morphisme : $X^* \xrightarrow{\varphi} Y^*$ (de monoïdes) .

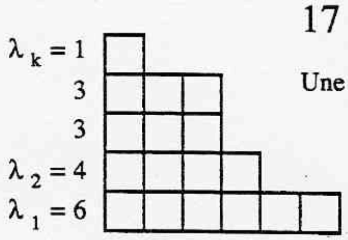
§6.Exemples

Définition 6.1: Une *partition* de l'entier n > 0 est une suite $(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ d'entiers > 0 telle que $n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$ et $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k$.

Exemple. Il existe 7 partitions de 5

5 = 5	5 = 3 + 1 + 1	5 = 2 + 1 + 1 + 1	5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1
5 = 4 + 1	5 = 2 + 2 + 1		
5 = 3 + 2			

Une partition est représentée graphiquement par un *diagramme de Ferrers,* c'est-à-dire un tableau ayant λ_1 cases dans la 1ère ligne, λ_2 cases dans la 2ème , ... , λ_k cases dans la kème ligne, comme indiqué sur la figure suivante:



17 = 6 + 4 + 3 + 3 + 1

Une partition de n = 17.

Diagramme de Ferrers ayant 17 cases

Exercice 6.2: a) Le produit infini $\prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-q^i}$ a un sens. Montrer que la série génératrice des entiers p(n), nombre de partitions de n (ou encore nombre de diagrammes de Ferrers ayant n cases) est donnée par

$$\sum_{n\geq 0} p(n)\ q^n = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-q^i} \qquad \left(= \frac{1}{\prod_{i\geq 1}(1-q^i)} \right)$$

(Les séries sont écrites avec la variable formelle q plutôt que t pour des raisons qui apparaîtront plus tard (voir chapitre IV).

b) Montrer que la série génératrice des partitions de n ayant au plus m parts est

$$\sum_{n\geq 0} p(n, m) = \frac{1}{(1 - q)(1 - q^2) \ldots (1 - q^m)} .$$

c) Montrer que la série génératrice des partitions de n dont les parts appartiennent à un ensemble d'entiers $I \subseteq \mathbb{N}$ est donnée par

$$\sum_{n\geq 0} p(n, I) = \prod_{i\in I} \frac{1}{1 - q^i} .$$

d) On appelle D-*partition* de n une partition $n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$ telle que $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2$, $1 \leq i < k$. Montrer que la série génératrice des D-partitions ayant m parts est

$$f_m = \frac{q^{m^2}}{(1 - q)(1 - q^2) \ldots (1 - q^m)} .$$

[On écrira $m^2 = 1 + 3 + \ldots + (2m - 1)$ et on établira une correspondance entre les partitions ayant au plus m parts et les D-partitions ayant m parts].

La famille des f_m est sommable et ainsi

$$\sum_{m\geq 0} \frac{q^{m^2}}{(1 - q)(1 - q^2) \ldots (1 - q^m)}$$

est la série génératrice des D-partitions.

e) Une identité tout à fait remarquable est

$$\sum_{m\geq 0} \frac{q^{m^2}}{(1 -q)(1 - q^2) \ldots (1 - q^m)} = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i\equiv 1,4 \\ \text{modulo } 5}} (1 - q^i)}$$

Cette identité est la première des célèbres *identités de Rogers-Ramanujan* .

D'après c) et d), cette identité revient à dire qu'il y a autant de partitions de n ayant des parts égales à 1 ou 4 modulo 5, que de D-partitions de n.

Exemple: vérifions le pour n = 9

D-partition de n = 9

$$\begin{cases} 9 = 9 \\ 9 = 8 + 1 \\ 9 = 7 + 2 \\ 9 = 6 + 3 \\ 9 = 5 + 3 + 1 \end{cases}$$

Partitions de n = 8 avec parts = 1, 4, 6, 9

$$\begin{cases} 9 = 9 \\ 9 = 6 + 1 + 1 + 1 \\ 9 = 4 + 4 + 1 \\ 9 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 9 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{cases}$$

C'était un célèbre problème ouvert en combinatoire de trouver une bijection entre les deux familles de partitions (ou diagrammes de Ferrers).

A. Garsia et S. Milne en ont donnés une en 1980, mais celle-ci est très "compliquée" et nécessite l'usage de l'ordinateur. C'est toujours un problème ouvert de savoir s'il existe une bijection "simple" démontrant l'identité de Rogers-Ramanujan.

Par contre, l'identité de l'exercice suivant est beaucoup plus simple à démontrer bijectivement.

Exercice 6.3: (suite de l'exercice 6.2)

Démontrer bijectivement l'identité

$$\sum_{m\geq 0} \frac{q^{m^2}}{[(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)]^2} = \frac{1}{\prod_{i\geq 1}(1-q^i)} .$$

On utilisera le fait que

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)}$$

est la serie génératrice des partitions ayant au plus m parts, tout comme c'est aussi la série génératrice des partitions dont les parts sont ≤ m. (voir b) et c) de l'exercice 6.2).