

CHAPITRE I

SERIES GENERATRICES RATIONNELLES

\mathbb{K} désigne un anneau commutatif intègre. Souvent on prendra $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dans ce chapitre.

§ 1. Définition et exemples

Définition 1.1. La série $f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ de $\mathbb{K}[[t]]$ est dite *rationnelle* ssi il existe des polynômes $N(t)$ et $D(t)$ de $\mathbb{K}[t]$, avec $D(0) = 1$, et tels que

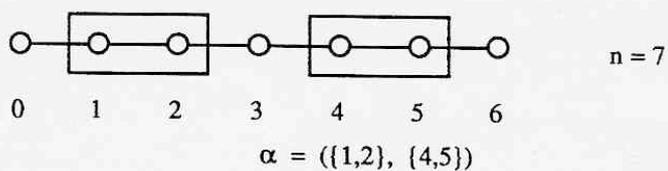
$$(1) \quad f(t) = \frac{N(t)}{D(t)} .$$

Remarque 1.2. On peut toujours se ramener au cas $D(0) = 1$ pour une série du type $N(t)/D(t)$ dans laquelle $D(0)$ est un élément inversible de \mathbb{K} .

Exemple 1.3. Couplages d'un segment et nombres de Fibonacci.

On considère le *segment* $[0, n-1]$. Un *domino* est une paire $\{i, i+1\}$, $0 \leq i < n-1$, d'entiers consécutifs. Un *couplage* du segment $[0, n-1]$ est un ensemble de dominos deux à deux disjoints.

Exemple :



Notons F_n le nombre de couplages du segment $[0, n-1]$.

Les premières valeurs des nombres F_n sont données par la table:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Table 1.

Le lecteur démontrera la relation

$$(2) \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{pour } n \geq 2; \quad F_0 = F_1 = 1.$$

Cette relation définit la suite de nombres $\{F_n\}_{n \geq 0}$ appelés *nombres de Fibonacci*.

Les deux relations suivantes seront une conséquence du théorème fondamental du §2:

$$(3) \quad \sum_{n \geq 0} F_n t^n = \frac{1}{1-t-t^2},$$

$$(4) \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}, \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Exemple 1.4. Polyominos tas.

La figure suivante donne un exemple de "polyomino tas".

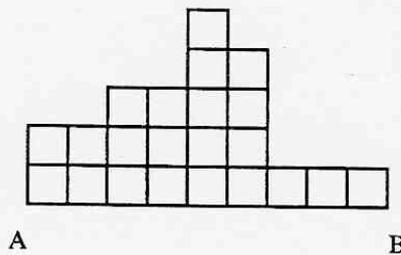
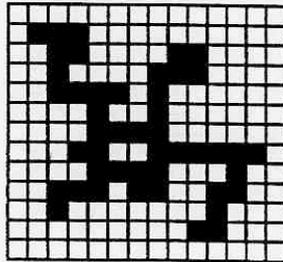


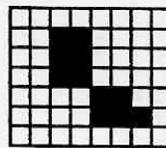
Figure 1. Un polyomino tas.

Définition. On considère $\Pi = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Un *carré élémentaire* (ou *cellule élémentaire*) (ou *case*) est l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que $i \leq x \leq j+1$ et $j \leq y \leq j+1$ pour un certain $(i,j) \in \Pi$. Un *polyomino* est une partie connexe de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ formée par la réunion de carrés élémentaires et dont l'intérieur est également connexe.

exemple:



Un polyomino formé de
31 cellules et de périmètre 60.



Ceci n'est pas un polyomino!

Figure 2.

Le *périmètre* d'un polyomino est la longueur de son bord, c'est-à-dire le nombre d'arêtes verticales $\{(i,j),(i,j+1)\}$ et horizontales $\{(i,j),(i+1,j)\} \in \Pi$, constituant le bord.

Dénombrer les polyominos selon le nombre de cellules (ou surface) ou selon le périmètre, ou les deux à la fois sont des célèbres problèmes complètement ouverts de la Combinatoire énumérative. Ce problème est également célèbre en Physique statistique (problème des *animaux*). Les physiciens ont obtenu de nombreux résultats asymptotiques approchés.

Un *polyomino tas* est un polyomino dont le bord est constitué de deux chemins allant d'un point A à un point B et n'ayant aucun sommet commun à part A et B. Le premier chemin n'a que des pas élémentaires Est, le second commence par une suite de pas élémentaires Nord ou Est, suivie par une suite de pas élémentaires Sud ou Est (voir figures 1 et 3).

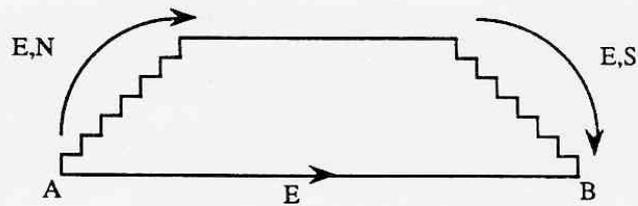
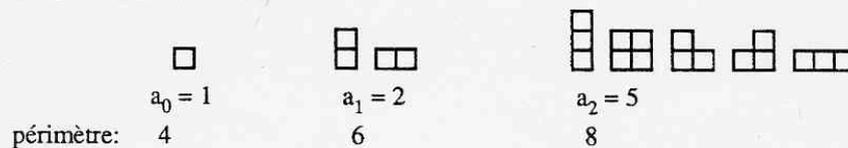


Figure 3.
Polyomino tas.

Soit a_n le nombre de polyominos tas de périmètre $2n + 4$ (le périmètre d'un polyomino est toujours pair et ≥ 4).

Les premières valeurs sont:



On trouverait $a_3 = 13$, $a_4 = 34$. On reconnaît les nombres de Fibonacci (table 1) d'indice pair.

exercice a) Trouver une *bijection* entre les polyominos tas de périmètre $2n + 4$ et les mots de longueur $2n$ du langage $L = (\{x\} \cup \{aa\})^*$, c'est-à-dire les mots du monoïde libre $\{a,x\}^*$ formés par un produit de lettres x et de mots aa (voir §5, ch.0).

En déduire que

$$(5) \quad a_n = F_{2n} \quad , \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

b) En utilisant la relation (3), montrer

$$(6) \quad \sum_{n \geq 0} a_n t^{2n} = \frac{1-t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \frac{1-t}{1-3t+t^2}$$

§2. Caractérisations.

Théorème 2.1. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, $k \geq 1$ et $\alpha_k \neq 0$. Soit $\{a_n\}_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \frac{N(t)}{D(t)} \quad \text{avec} \quad D(t) = 1 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_k t^k \quad \text{et} \quad N(t) \text{ polynôme de degré } < k,$$

$$(ii) \quad \forall n \geq 0, \quad a_{n+k} + \alpha_1 a_{n+k-1} + \dots + \alpha_k a_n = 0,$$

$$(iii) \quad \text{En notant } D(t) = \prod_{i=1}^r (1 - \delta_i t)^{k_i}, \quad \text{on a pour tout } n \geq 0, \quad a_n = \sum_{i=1}^r P_i(n) \delta_i^n, \quad \text{dans lequel}$$

$P_i(n)$ est un polynôme en n de degré $< k_i$.

La relation (ii) est appelée récurrence linéaire, à coefficients constants, homogène, de degré k .

Remarque 2.2. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i') condition (i) et les polynômes $N(t)$ et $D(t)$ sont premiers entre eux,

(ii') condition (ii) et $\{a_n\}_{n \geq 0}$ ne satisfait pas de récurrence linéaire homogène à coefficients constants de degré $< k$,

(iii') condition (iii) et pour tout i , $1 \leq i \leq r$, $\deg P_i(n) = k_i - 1$.

Remarque 2.3. Si $\sum_{n \geq 0} a_n t^n = \frac{P(t)}{D(t)}$ avec $\deg P - \deg D = p \geq 0$, alors on peut écrire

$$(7) \quad \frac{P(t)}{D(t)} = L(t) + \frac{N(t)}{D(t)} \quad \text{avec} \quad \deg N < \deg D = k,$$

$$(8) \quad \forall n > p, \quad a_{n+k} + \alpha_1 a_{n+k-1} + \dots + \alpha_k a_n = 0,$$

$$(9) \quad \forall n > p, \quad a_n = \sum_{i=1}^r P_i(n) \delta_i^n.$$

Remarque 2.4. Notons $N(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_{k-1} t^{k-1}$. La relation (i) équivaut à dire

$$(10) \quad (1 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_k t^k) \left(\sum_{n \geq 0} a_n t^n \right) = N(t), \quad \text{c'est-à-dire encore les relations (11) et (12):}$$

$$(11) \quad \forall j, 0 \leq j \leq k-1, \beta_j = a_j + \alpha_1 a_{j-1} + \dots + \alpha_j a_0,$$

$$(12) \quad \forall j \geq k, j = k+n \text{ avec } n \geq 0, a_{n+k} + \alpha_1 a_{n+k-1} + \dots + \alpha_k a_n = 0.$$

La relation (11) permet de calculer le numérateur $N(t)$ connaissant les valeurs initiales a_0, a_1, \dots, a_{k-1} de la suite $\{a_n\}_{n \geq 0}$.

Preuve du théorème 2.1 Pour $D(t) = 1 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_k t^k$ fixé, soient V_1, V_2, V_3, V_4 les espaces vectoriels formés par les suites $\{a_n\}_{n \geq 0}$ de nombres complexes satisfaisant respectivement les conditions (i), (ii), (iii) et

$$(iv) \quad \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \sum_{i=1}^r \frac{N_i(t)}{(1-\delta_i t)^{k_i}} \text{ avec } N_i(t) \in \mathbb{C}[t] \text{ et } \deg N_i < k_i.$$

a) D'après la remarque 2.4, $V_1 \subseteq V_2$.

b) Trivialement $V_4 \subseteq V_1$.

c) Montrons que $V_4 \subseteq V_3$.

Par linéarité, il suffit de démontrer (iv) \Rightarrow (iii) pour $r = 1$. Il vient successivement:

$$\begin{aligned} \frac{N(t)}{(1-\gamma t)^k} &= \left(\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j t^j \right) (1-\gamma t)^{-k}, \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \left(\sum_{m \geq 0} \frac{k(k+1) \dots (k+m-1)}{m!} \gamma^m t^m \right) t^j, \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \gamma^j \beta_j \frac{k(k+1) \dots (k+n-j-1)}{(n-j)!} \right) \gamma^n t^n, \\ &= \sum_{n \geq 0} P(n) \gamma^n t^n, \end{aligned}$$

avec

$$(13) \quad P(n) = \sum_{j=0}^{k-1} \gamma^j \beta_j \binom{k+n-j-1}{k-1}.$$

Comme $\binom{k+n-j-1}{k-1} = \frac{(n+k-j-1)(n+k-j-2) \dots (n-j+1)}{(k-1)!}$, $P(n)$ est un polynôme en n .

d) On vérifie que les espaces vectoriels V_1, V_2, V_3, V_4 ont tous la même dimension k . Les conditions a), b), c), d) prouvent le théorème.

C.Q.F.D.

Remarque 2.5. D'après (13) le coefficient de n^{k-1} dans $P(n)$ est $\frac{1}{(k-1)!} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \gamma^j \beta_j \right)$. D'où

la remarque 2.2.

Remarque 2.6. L'équivalence (i) \Leftrightarrow (ii) est vraie pour tout anneau \mathbb{K} commutatif.

Remarque 2.7. (étude asymptotique de a_n).

Si le polynôme $D(t)$ a un zéro réel $1/\gamma$ de plus petit module (parmi tous les zéros de $D(t)$) alors d'après (iii),

$$(14) \quad a_n \sim P(n) \gamma^n.$$

Exemple 2.8. Nous reprenons l'exemple 1.3 des nombres de Fibonacci. D'après le théorème 2.1, la récurrence linéaire (2) est équivalente à

$$(15) \quad \sum_{n \geq 0} F_n t^n = \frac{at+b}{1-t-t^2}.$$

Les conditions initiales $F_0 = F_1 = 1$ impliquent d'après (11) que $a = 0, b = 1$. Appliquons la condition (iii) du théorème 2.1.

Le polynôme réciproque de $D(t) = 1 - t - t^2$ est $D^*(t) = t^2 D(1/t) = t^2 - t - 1$. Ses zéros sont

$$\delta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \text{ Ainsi } F_n \text{ s'écrit sous la forme } F_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

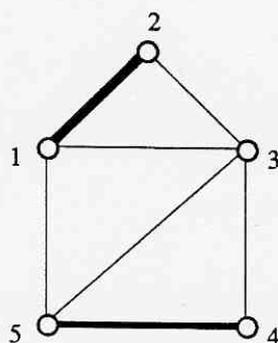
Les conditions initiales $F_0 = \alpha + \beta = 1, F_1 = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$, permettent de

$$\text{calculer } \alpha \text{ et } \beta. \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.$$

§3. Autres exemples

Exemple 3.1. Polynôme de couplage du segment $[0, n-1]$

Définition 3.2. On considère un *graphe* (non orienté) $G = (S, A)$, c'est-à-dire un ensemble A de paires $\{s, t\}$ d'éléments de S . Les éléments de S (resp. A) sont les sommets (resp. arêtes) du graphe. Un *couplage* α du graphe G est un ensemble d'arêtes de G deux à deux disjointes (voir figure 4).



$$\alpha = (\{ 1, 2 \}, \{ 4, 5 \})$$

Figure 4.

Couplage d'un graphe.

Le *polynôme de couplage* $C_G(x)$ du graphe G est le polynôme "énumérateur" des couplages selon le nombre d'arêtes. Plus précisément, pour $n = |S|$, nombre de sommets de S ,

$$(16) \quad C_G(x) = \sum_{\substack{\alpha \\ \text{couplage} \\ \text{de } G}} (-1)^{|\alpha|} x^{n-2|\alpha|}$$

Remarque 3.3. On aurait pu aussi introduire le polynôme $\sum_{\alpha} x^{|\alpha|}$. Celui introduit en (16) est

plus commode à étudier. Les polynômes de couplages jouent un rôle important dans certaines considérations de Physique statistique et de Chimie. Notamment une propriété importante démontrée par les physiciens Kunz en 1970 et Heilmann et Lieb en 1972 est: la suivante : pour tout graphe G , les zéros du polynôme de couplage $C_G(x)$ sont réels.

Exemple. Pour le graphe G de la figure 4, $C_G(x) = x^5 - 7x^3 + 7x$.

Le lecteur vérifiera que les cinq zéros sont bien réels.

On note $F_n(x)$ le polynôme de couplage du graphe Seg_n , le graphe dont l'ensemble des sommets est le segment $[0, n-1]$ et dont les arêtes sont $\{i, i+1\}$ pour $0 \leq i < n-1$. (Voir figure 5).

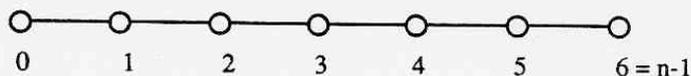


Figure 5. Le graphe segment Seg_n .

Les premiers polynômes sont $F_0(x) = 1$, $F_1(x) = x$, $F_2(x) = x^2 - 1$, $F_3(x) = x^3 - 2x$, $F_4(x) = x^4 - 3x^2 + 1$.

Exercice. Montrer les relations suivantes:

$$(17) \quad F_n(x) = xF_{n-1}(x) - F_{n-2}(x), \quad \text{pour tout } n \geq 2,$$

$$(18) \quad \sum_{n \geq 0} F_n(x) t^n = \frac{1}{1 - xt + t^2},$$

$$(19) \quad F_n(x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n-k}{k} x^{n-2k}.$$

On donnera deux preuves de (19), l'une analytique à partir de (18), l'autre bijective à partir de la définition du polynôme de couplage.

$$(20) \quad F_n(x) = U_n\left(\frac{x}{2}\right),$$

dans lequel $U_n(x)$ désigne le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebycheff de $2^{\text{ième}}$ espèce défini par

$$(21) \quad \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = U_n(\cos\theta).$$

En somme la série génératrice $\sum_{n \geq 0} F_n(x) t^n$ est un exemple de série rationnelle de $\mathbb{K}[[t]]$ avec ici $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[x]$.

Exemple 3.4. Suites polynomiales. Soit $\{a_n\}_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes.

D'après le théorème 2.1, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

(21) $a_n = a(n)$ est un polynôme de degré k en n ,

(22) $\sum_{n \geq 0} a_n t^n = \frac{N(t)}{(1-t)^{k+1}}$ avec $N(t)$ polynôme de degré k et $N(1) \neq 0$.

Exercice. Montrer que les deux identités suivantes sont équivalentes

$$(23) \quad \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \frac{\sum_{j=0}^k \beta_j t^j}{(1-t)^{k+1}},$$

$$(24) \quad \forall_{n \geq 0}, a_n = \sum_{j=0}^k \beta_j \binom{n+k-j}{k}.$$

Exercice (Difficile) . Polynômes eulériens.

Soit \mathfrak{S}_n l'ensemble des $n!$ permutations sur $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. La permutation $\sigma = \sigma(1) \dots \sigma(n)$ a une *montée* à l'indice i ssi $\sigma(i) < \sigma(i+1)$. Notons $a_{n,j}$ le nombre de permutations de \mathfrak{S}_n ayant j

montées. Les polynômes $A_n(x) = \sum_{0 \leq j < n} a_{n,j} x^j$ s'appellent *polynômes eulériens*.

Table des coefficients de A_1, \dots, A_6 .

n \ j	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1	1				
3	1	4	1			
4	1	11	11	1		
5	1	26	66	26	1	
6	1	57	302	302	57	1

Table 2.
Polynômes Eulériens .

En utilisant l'exercice précédent, montrer que

$$(25) \quad \forall_{k \geq 0}, \sum_{n \geq 1} n^k t^n = \frac{t A_k(t)}{(1-t)^{k+1}} .$$

S4. Chemins et matrice de transfert.

Soit S un ensemble.

Définition 4.1. Un *chemin* de S est une suite (quelconque) $\omega = (s_0, s_1, \dots, s_n)$ d'éléments de S . Les s_i sont appelés *sommets* de ω . Le chemin va de s_0 à s_n . Le sommet s_0 est le *point de départ*. Le sommet s_n est le *point d'arrivée*. $|\omega| = n$ note la *longueur* du chemin. Un *pas élémentaire* est un couple (s_i, s_{i+1}) .

Définition 4.2. Une *valuation* est une application $v: S \times S \rightarrow \mathbb{K}$. La *valuation* (ou *poids*) d'un chemin $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ est le produit des valuations de ses pas élémentaires:

$$(26) \quad v(\omega) = \prod_{i=1}^n v(s_{i-1}, s_i) .$$

Se donner une valuation revient à se donner la matrice $M = \left(a_{s,t} \right)_{(s,t) \in S \times S}$ avec $a_{s,t} = v(s,t)$.

Cette matrice est appelée *matrice de transfert*.

Dans ce paragraphe, S est fini de cardinal $|S| = k$ et M est une $k \times k$ matrice à coefficient dans l'anneau \mathbb{K} .

Remarque 4.3. Lorsque v est à valeur 0 ou 1, se définir une valuation v revient à se définir un *graphe (orienté)* $G = (S, A)$. Les arêtes de G sont les couples (s,t) tels que $v(s,t) = 1$. La matrice M s'appelle la *matrice d'incidence* du graphe. Les chemins de G sont les chemins de valuation non nulle et $\sum_{\omega} v(\omega)$ est le nombre de chemins allant de s à t (la notation $\sum_{\substack{\omega \\ s \rightarrow t}}$ indique que la sommation

est effectuée pour tous les chemins allant de s à t).

Dans toute la suite de ce paragraphe, on suppose que:

- la valuation v prend ses valeurs dans l'anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} et en variables formelles dans X ,
- $v(s,t)$ est sans terme constant pour tout $s, t \in S$.

Pour tout $s, t \in S$ la famille $\{v(\omega), \omega \text{ chemin allant de } s \text{ à } t\}$ est sommable et l'on a lemme:

Lemme 4.4. Soit $S = \{1, 2, \dots, k\}$, v une valuation satisfaisant a) et b), et M la matrice de transfert associée. ($k \times k$ matrice à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$). La matrice $(I - M)$ est inversible et le terme (i, j) de la matrice inverse est :

$$(27) \quad (I - M)^{-1}_{ij} = \sum_{\substack{\omega \\ i \rightarrow j}} v(\omega).$$

Preuve. $(I - M)^{-1}$ est en fait la matrice $(I + M + M^2 + \dots + M^n + \dots)$ (matrice à coefficient dans $\mathbb{K}[[X]]$).

On vérifie aisément, d'après la définition du produit matriciel, que le terme (i, j) de M^n est:

$$(28) \quad (M^n)_{ij} = \sum_{\substack{\omega \leftarrow n \\ i \rightarrow j}} v(\omega) \quad (\text{sommation parmi tous les chemins de longueur } n \text{ allant de } i \text{ à } j).$$

Définition 4.5. Un cycle de S est une séquence circulaire de sommets distincts de S , c'est-à-dire $\gamma = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$ défini à une permutation circulaire près $(s_1, \dots, s_{n-1}, s_0, \dots, s_{i-1})$.

Exemple:

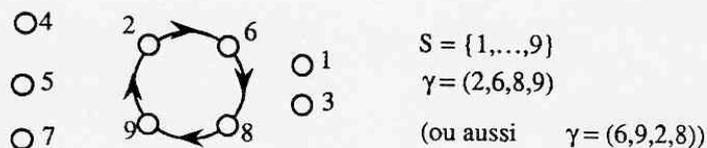


Figure 6. Un cycle .

Valuation d'un cycle. $\gamma = (s_0, \dots, s_{n-1})$

$$(29) \quad v(\gamma) = v(s_0, s_1) \dots v(s_{n-2}, s_{n-1}) v(s_{n-1}, s_0).$$

Définition 4.6. On définit le polynôme D de $\mathbb{K}[X]$ par:

$$(30) \quad D = \sum_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}} (-1)^r v(\gamma_1) \dots v(\gamma_r),$$

où la sommation est étendue aux configurations de r cycles ($r \geq 0$) de S deux à deux disjoints (pas de sommets communs).

Remarque 4.7. La configuration vide ($r = 0$) a comme valuation 1. Les cycles ne recouvrent pas forcément tous les sommets de S .

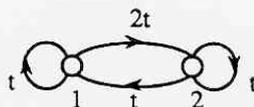
Définition 4.8. Pour $i, j \in S$, on définit le polynôme $N_{i,j}$ de $\mathbb{K}[X]$ par

$$(31) \quad N_{i,j} = \sum_{\{\eta; \gamma_1, \dots, \gamma_r\}} (-1)^r v(\eta) v(\gamma_1) \dots v(\gamma_r),$$

où la sommation est parmi les configurations formées d'un chemin η allant de i à j et ne se recoupant pas avec lui-même (c'est-à-dire tous ses sommets sont distincts) et d'un ensemble de r cycles ($r \geq 0$) de S , deux à deux disjoints et disjoints du chemin η .

Remarque 4.9. Si $i = j$, alors η est réduit au sommet i .

Exemple 4.10.



$$S = \{1, 2\}.$$

$v: S \times S \rightarrow \mathbb{Z}[t]$ est défini par

$$M = \begin{bmatrix} t & 2t \\ t & t \end{bmatrix}$$

$$D = 1 - (t + t + 2t^2) + t^2 = 1 - 2t - t^2$$



$$N_{1,1} = 1 + t = 1+t$$

Théorème 4.11. Avec les notations précédentes (30) et (31),

$$(32) \quad \sum_{\substack{\omega \\ i \rightarrow j}} v(\omega) = \frac{N_{ij}}{D}.$$

Preuve algébrique.

D'après le lemme 4.4, il suffit de vérifier que $D = \det(I - M)$ (déterminant) et $N_{i,j} = \text{cof}_{j,i}(I - M)$ (cofacteur).

a) Par définition du *déterminant* :

$$(33) \quad \det(I - M) = \sum_{\sigma} (-1)^{\text{Inv}(\sigma)} w(\gamma_1) \dots w(\gamma_s),$$

où la sommation est parmi toutes les permutations de \mathfrak{S}_k , $\text{Inv}(\sigma)$ désigne le nombre d'inversion de σ . De plus $\sigma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ est la décomposition en cycles de σ et $w(\gamma)$ est la valuation du cycle définie par

$$(34) \quad \text{pour } i, j \in \{1, \dots, k\} \quad \begin{cases} w(i, j) = -v(i, j) & \text{si } i \neq j, \\ w(i, j) = 1 - v(i, i) & \text{si } i = j. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} \text{Inv}(\sigma) &= \sum_{i=1}^s \text{Inv}(\gamma_i), \\ &= \sum_{i=1}^s (|\gamma_i| - 1), \\ &= k - s. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(35) \quad \det(I - M) = \sum_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}} (-1)^{k-s} (-1)^{|\gamma_1| + \dots + |\gamma_r|} v(\gamma_1) \dots v(\gamma_r),$$

où la sommation est parmi les configurations de cycles de S deux à deux disjointes (les sommets de S non couverts par un cycle γ_j correspondent à un point fixe de σ avec choix du terme 1 dans le poids $w(i,i) = 1 - v(i,i)$).

b) Pour le cofacteur:

$$(36) \quad \text{cof}_{j,i}(I - M) = \det((I - M)_{j,i})$$

dans lequel $(I - M)_{j,i}$ désigne la $k \times k$ matrice obtenue à partir de la matrice $(I - M)$ en remplaçant la $j^{\text{ème}}$ ligne (resp. $i^{\text{ème}}$ colonne) par des zéros et en mettant un 1 en position (j,i) . On se ramène alors au cas a). D'où $\text{cof}_{j,i}(I - M) = N_{i,j}$ défini ci-dessus.

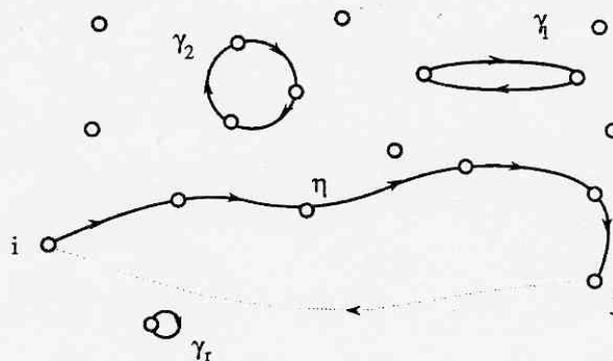


Figure 7. Le cofacteur $N_{i,j}$.

□

Preuve bijective.

Nous allons maintenant démontrer "bijectivement" le théorème, c'est-à-dire l'égalité

$$(37) \quad \left(\sum_{\substack{\omega \\ i \rightarrow j}} v(\omega) \right) D = N_{i,j}.$$

Notations. $\text{Ch}(i,j)$, ensemble des chemins de S allant de i à j .
 Det , ensemble des configurations $\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ de cycles de $[k]$ deux à deux disjoints. (définition 4.6).
 $\text{Cof}(i,j) \subseteq \text{Ch}(i,j) \times \text{Det}$, ensemble des configurations $\{\eta; \gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ de la définition 4.8.

L'égalité (37) sera une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 4.12. *Il existe une involution φ (c'est-à-dire $\varphi = \varphi^{-1}$)*

$\varphi: [\text{Ch}(i,j) \times \text{Det}] \setminus \text{Cof}(i,j) \longrightarrow [\text{Ch}(i,j) \times \text{Det}] \setminus \text{Cof}(i,j)$ telle que, en notant $\varphi(\omega; \gamma_1, \dots, \gamma_r) = (\omega'; \gamma'_1, \dots, \gamma'_s)$, alors

$$(38) \quad \begin{cases} \text{(i)} & v(\omega) v(\gamma_1) \dots v(\gamma_r) = v(\omega') v(\gamma'_1) \dots v(\gamma'_s), \\ \text{et} & \\ \text{(ii)} & s = r \pm 1. \end{cases}$$

Construction d'une involution φ .

Soit $\xi = (\omega; \gamma_1, \dots, \gamma_r)$ un élément de $E(i,j) = [\text{Ch}(i,j) \times \text{Det}] \setminus \text{Cof}(i,j)$, avec $\omega = (s_0, \dots, s_n)$.

Soit ℓ le plus petit entier $0 \leq \ell \leq n$ vérifiant l'une des 2 conditions suivantes:

$$(39) \quad \begin{cases} \text{(i)} & \text{Il existe } k, 0 \leq k < \ell \text{ avec } s_k = s_\ell, \\ \text{(ii)} & s_\ell \text{ appartient à l'un des cycles } \gamma_1, \dots, \gamma_r. \end{cases}$$

Dire que cet entier ℓ existe équivaut à dire que $\xi \notin \text{Cof}(i,j)$. D'autre part, ce plus petit entier ℓ ne peut vérifier à la fois (i) et (ii).

Dans le cas (i), on définit

$$\varphi(\xi) = (\omega'; \{\gamma_1, \dots, \gamma_r, \gamma\})$$

avec

$$\omega' = (s_0, \dots, s_{k-1}, s_\ell, \dots, s_n) \text{ et } \gamma = (s_k, s_{k+1}, \dots, s_{\ell-1}).$$

Dans le cas (ii) $s_\ell \in \gamma_j = (s_\ell, y_1, \dots, y_p)$. On définit alors

$$\varphi(\xi) = (\omega'; \{\gamma_1, \dots, \gamma_{j-1}, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_r\})$$

avec

$$\omega' = (s_0, \dots, s_\ell, y_1, \dots, y_p, s_\ell, s_{\ell+1}, \dots, s_n).$$

Lemme 4.13. φ est une involution $E(i,j) \rightarrow E(i,j)$ vérifiant les conditions (i) et (ii) de la proposition 4.12. (i) et (ii) sont trivialement vérifiées. Le lecteur démontrera $\varphi^2 = \text{Id}$ (identité sur $E(i,j)$) en se reportant à la figure suivante:

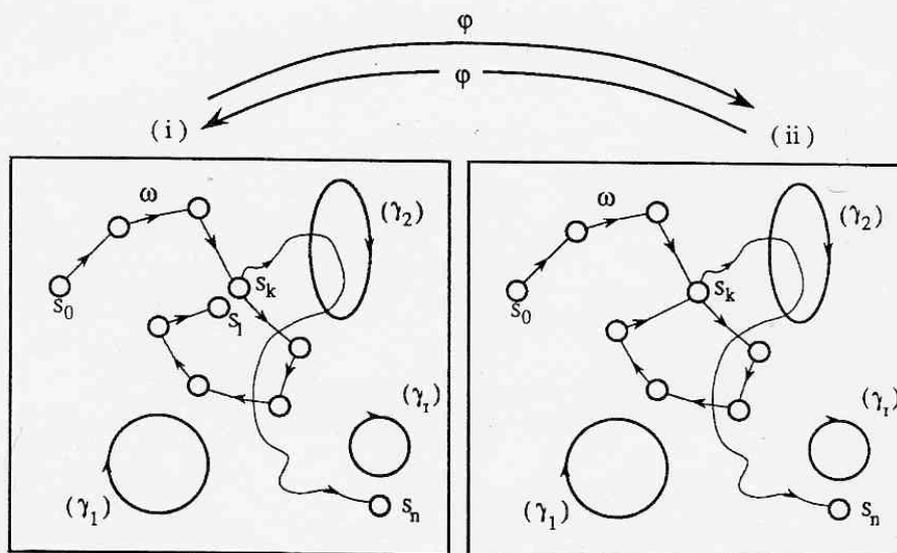


Figure 8. L'involution φ .

Une configuration $\xi = (\omega; \gamma_1, \dots, \gamma_r)$ dans le cas (i) devient par φ une configuration $\xi' = (\omega'; \gamma_1, \dots, \gamma_r, \gamma)$ dans le cas (ii) et vice versa.

Remarque 4.14. En prenant pour valuation $v(i,j) = a_{ij}$, nous avons ainsi démontré bijectivement la formule classique donnant l'inverse d'une matrice.

Remarque 4.15. En prenant $v(i,j) = a_{ij}t$ et en notant $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k} = A$, le polynôme (en t) $D = \det(I - At)$ est, au signe près, le polynôme réciproque du *polynôme caractéristique* $\det(tI - A)$ de la matrice A . Dans la série rationnelle N_{ij}/D , les coefficients γ_i apparaissant dans le théorème fondamental sont les *valeurs propres* de la matrice A .

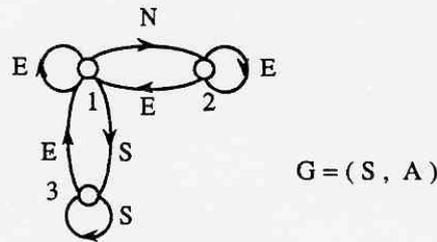


Figure 10.

Le nombre a_n de tels chemins de longueur n est aussi $\sum_{|\omega|=n} v(\omega)$, somme des valuations des chemins de longueur n , commençant en 1, sur le "graphe réduit" $G' = (S', A')$ suivant: $S' = \{1, 2\}$ l'arête allant de 1 à 2 est valuée 2, toutes les autres sont valuées 1.

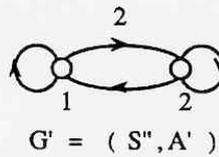


Figure 11.

D'après le théorème 4.11 et l'exemple 4.10, la série génératrice des a_n est rationnelle et égale à

$$(40) \quad \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \frac{1+t}{1-2t-t^2} + \frac{2t}{1-2t-t^2} = \frac{1+3t}{1-2t-t^2}$$

chemin allant de 1 → 1 chemin 1 → 2

Exemple 5.2 Couplages de $[0, n-1]$.

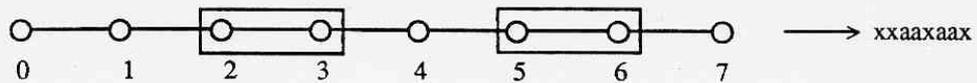


Figure 12.

Un couplage de $[0, n-1]$ est en bijection avec un mot de longueur n de $(\{x\} \cup \{aa\})^*$. Un tel mot est en bijection avec les chemins de longueur n , commençant en 1, finissant en 1, du graphe suivant

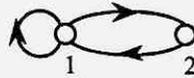


Figure 13.

Leur série génératrice est (voir aussi exemple 1.3)

$$\sum_{n \geq 0} F_n t^n = \frac{1}{1-t-t^2}.$$

Le polynôme de couplage $F_n(x)$ correspond aux chemins sur le graphe G , muni de la valuation suivante (voir aussi l'exemple 3.1)

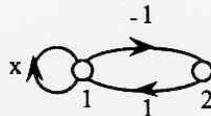


Figure 14.

Ainsi

$$(41) \quad \sum_{n \geq 0} F_n(x) t^n = \frac{1}{1-xt+t^2}.$$

Exercice 5.3 Polynôme de couplage de l'échelle E_n .

E_n est le graphe

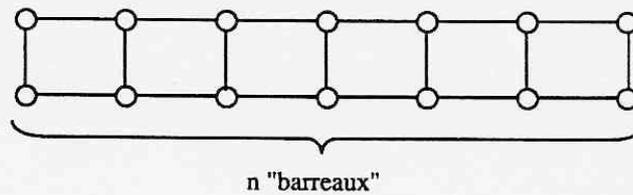


Figure 15. L'échelle E_n .

Montrer que la série génératrice des polynômes de couplages $P_n(x)$ des graphes E_n est

$$(42) \quad \sum_{n \geq 0} P_n(x) t^n = \frac{1+t}{1+t(2-x^2)+t^2x^2-t^3}$$

Exemple 5.4 Chemins de Dyck bornés à la hauteur k .

Un *chemin de Dyck* est un chemin $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $s_0 = (0,0)$, $s_n = (2n,0)$ et ayant des pas élémentaires *Nord-Est* ($s_i = (x,y)$, $s_{i+1} = (x+1, y+1)$) ou *Sud-Est* ($s_i = (x,y)$, $s_{i+1} = (x+1, y-1)$).

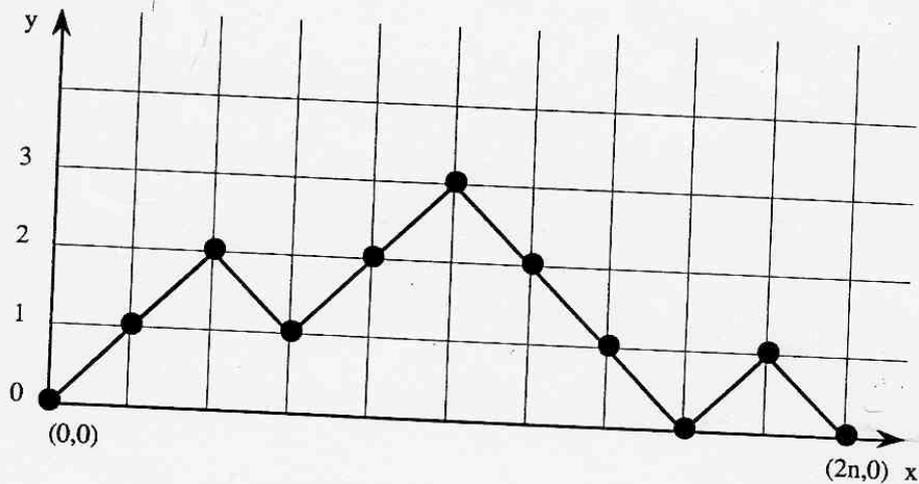


Figure 16. Chemin de Dyck .

La hauteur $H(\omega)$ est

$$(43) \quad H(\omega) = \max_{0 \leq i \leq n} (y_i) \quad \text{pour } s_i = (x_i, y_i).$$

Pour $k \geq 0$, soit $a_{2n,k}$ le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$ et de hauteur $H(\omega) \leq k$.

Soit

$$f_k(t) = \sum_{n \geq 0} a_{2n,k} t^{2n}.$$

Par projection du chemin de Dyck sur l'axe des y , $a_{2n,k}$ est aussi le nombre de chemins de longueur $2n$, sur le graphe $\text{Seg}_{k+1} = [0, k]$, *segment* de longueur $k+1$, allant de 0 à 0.

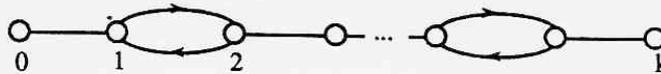


Figure 17.

D'après le théorème 4.11 et les définitions 4.6, 4.8 de D et $N_{0,0}$, il vient

$$f_k(t) = \frac{N_{0,0}}{D}, \quad \text{dans lequel}$$

$$(44) \quad D(t) = \sum_{\substack{\alpha \\ \text{couplages} \\ \text{de } S_{k+1}}} (-1)^{|\alpha|} x^{2|\alpha|}; \quad N_{0,0}(t) = \sum_{\substack{\alpha \\ \text{couplages} \\ \text{de } S_{k+1} \\ \text{ne contenant pas } 0}} (-1)^{|\alpha|} x^{2|\alpha|}.$$

Il est clair que $D(t)$ est le polynôme réciproque du polynôme de couplage $F_{k+1}(t)$ du graphe S_{k+1} :

$$D(t) = t^{k+1} F_{k+1}(1/t) \quad \text{noté aussi } F_{k+1}^*(t).$$

De même $N_{0,0}(t) = F_k^*(t) = t^k F_k(1/t)$.

Ainsi

$$(45) \quad f_k(t) = \frac{F_k^*(t)}{F_{k+1}^*(t)}.$$

Rappelons (voir exemple 3.1) que $F_k(x) = U_k(x/2)$ avec $U_k(x)$ polynôme de Tchebycheff de 2^{ème} espèce défini par

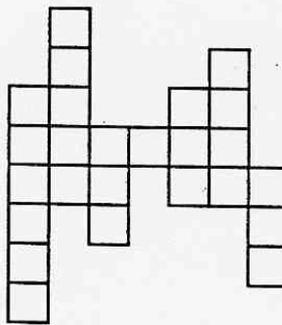
$$\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta} = U_k(\cos\theta) .$$

exercice 5.5 (difficile)

Un polyomino P est dit *verticalement convexe* ssi l'intersection de P avec toute droite verticale $x = c$ est un segment (connexe).

C'est une réunion de "colonnes verticales".

exemple :



Un polyomino verticalement convexe.

Soit $a_{n,k}$ le nombre de polyominos verticalement convexes ayant n cases et k "colonnes verticales". Soit a_n le nombre de tels polyominos ayant n cases. Montrer que

$$(46) \quad \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \frac{t(1-t)^3}{1-5t+7t^2-4t^3} .$$