

CHAPITRE II

SERIES GENERATRICES ALGEBRIQUES

Ici l'anneau des coefficients \mathbb{K} est \mathbb{C} . Ce chapitre met l'accent sur les séries algébriques. Les deux derniers paragraphes (inversion de Lagrange et opérations sur les objets combinatoires) sont valables pour toute série génératrice ordinaire.

Définition 0.1 - La série $f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ de $\mathbb{C}[[t]]$ est dite *algébrique* s'il existe des polynômes

$P_0(t), \dots, P_k(t)$ tels que

$$(1) \quad P_0(t) + P_1(t) f(t) + \dots + P_k(t) f^k(t) = 0.$$

Le plus petit entier k possible pour (1) est appelé le *degré* de $f(t)$.

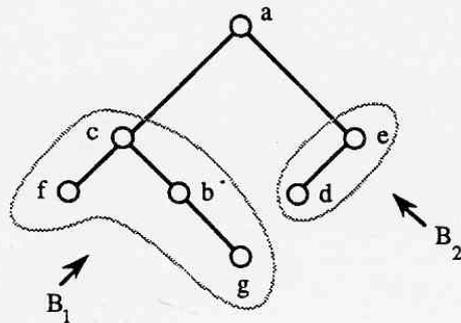
Nous commençons par un exemple important: la série génératrice des nombres de Catalan. Les nombreux objets combinatoires l'interprétant (arbres, chemins, ...) ainsi que les bijections correspondantes jouent un rôle important en combinatoire.

§ 1 - Arbres binaires et arbres planaires

a) Arbres binaires

Définition 1.1 - (définition "récursive") Un *arbre binaire (étiqueté)* B sur (un ensemble) S fini est:

- si $S = \emptyset$ alors $B = \emptyset$,
- sinon B est un triplet (B_1, r, B_2) avec $r \in S$ et B_1 et B_2 sont des arbres binaires respectivement sur des ensembles S_1 et S_2 tels que $(\{r\}, S_1, S_2)$ est une partition de S (avec éventuellement S_1 ou S_2 vide).

Exemple 1.2:

$$S = \{ a, b, c, \dots, g \}$$

$$B = (B_1, a, B_2)$$

$$B_1 = (B_3, c, B_4)$$

$$B_2 = (B_6, e, \emptyset)$$

$$B_3 = (\emptyset, f, \emptyset)$$

$$B_4 = (\emptyset, b, B_5)$$

$$B_5 = (\emptyset, g, \emptyset)$$

$$B_6 = (\emptyset, d, \emptyset)$$

Figure 1. Arbre binaire (étiqueté).

Pour l'arbre binaire $B = (B_1, r, B_2)$ sur S , l'élément r est appelé *racine* de l'arbre, S est l'ensemble des *sommets* de B , B_1 (resp. B_2) est le *sous-arbre gauche* (resp. droit) de B et est noté $B_1 = g(B)$ (resp. $B_2 = d(B)$).

Définition 1.3 - Soit B et B' deux arbres binaires dont les ensembles de sommets sont respectivement S et S' . Un *isomorphisme* d'arbres binaires est une bijection $\varphi: S \rightarrow S'$ "conservant" les structures d'arbres binaires.

Le lecteur donnera aisément le sens du mot "conserver". Un exemple suffira à se faire comprendre du lecteur:

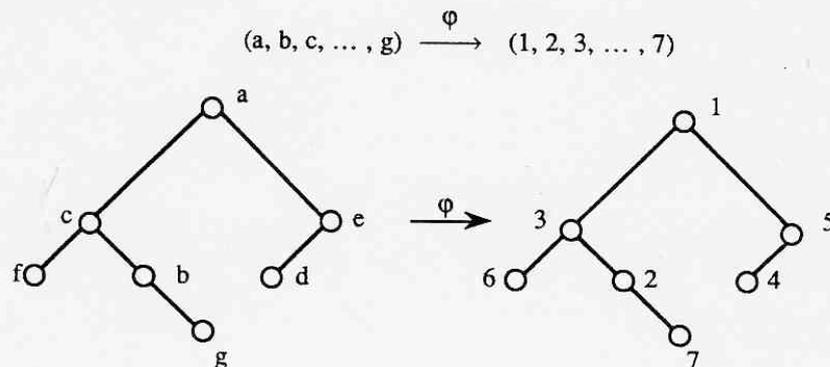


Figure 2. Isomorphisme d'arbres binaires.

Si $S = S'$, on parle alors d'automorphisme d'arbre binaire.

Définition 1.4 - Un *arbre binaire* est un arbre binaire étiqueté défini à un automorphisme près.

Là aussi, on parle des sommets de l'arbre, de racine, sous-arbre gauche et droit.

Remarque 1.5 - Un *étiquetage* d'un arbre binaire est une application de l'ensemble S des sommets dans un ensemble E (appelé l'ensemble des étiquettes). Un "arbre binaire étiqueté" (définition 1.1) peut être identifié à un arbre binaire (définition 1.3) muni d'un étiquetage dont toutes les étiquettes sont distinctes.

Nombres de Catalan

Notons C_n le nombre d'arbres binaires ayant n sommets. Ces nombres s'appellent *nombres de Catalan*. Leurs premières valeurs sont les suivantes:

n	0	1	2	3	4	5	6
C_n	1	1	2	5	14	42	132

Table 1. Nombres de Catalan.

Le dessin de la figure 3

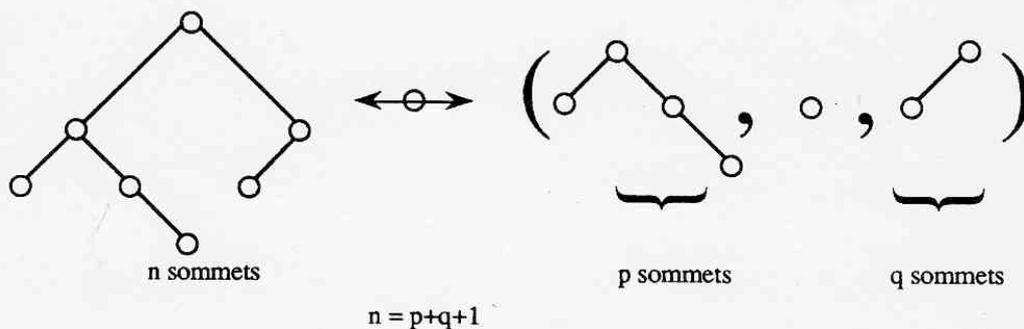


Figure 3. Récurrence pour le nombre de Catalan

se traduit par la récurrence suivante:

$$(2) \quad C_n = \sum_{\substack{p+q=n-1 \\ p, q \geq 0}} C_p C_q, \quad C_0 = 1.$$

La récurrence (2) est équivalente à la relation suivante pour la série génératrice $f(t) = \sum_{n \geq 0} C_n t^n$ des nombres de Catalan.

$$(3) \quad f(t) = 1 + t f^2(t).$$

La série génératrice $f(t)$ est une série algébrique de degré 2.

On peut en fait résoudre (3) et donner une formule explicite pour le nombre de Catalan C_n . Il vient successivement:

$$f(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}.$$

Le coefficient de t^{n+1} dans le développement de $(1 - 4t)^{1/2}$ est égal à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \binom{1/2}{n} (-4)^n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - n \right) \frac{(-4)^{n+1}}{(n+1)!} = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \\ &= -2 \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$(4) \quad C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Remarquons que le nombre d'arbres étiquetés sur $\{1, 2, \dots, n\}$ est $n! C_n = \frac{2n!}{(n+1)!}$.

Vocabulaire sur les arbres binaires

Soit B un arbre binaire $B = (g(B), r(B), d(B))$ sur un ensemble de sommets S , de racine $r=r(B)$.

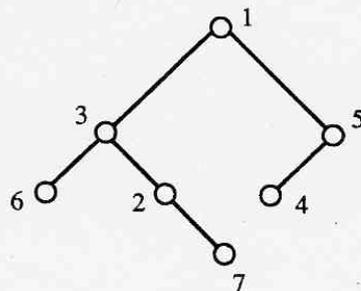
Si $g(B) \neq \emptyset$, alors $fg(r) = r(g(B))$ est appelé le *fil gauche* de r . De même $fd(B) = r(d(B))$ est appelé *fil droit* (s'il existe) de r .

Le sommet r est appelé *père* de $g(B)$ et $d(B)$. Ces notions s'étendent pour tout sommet x de S .

Les paires $(x, fg(x))$ ou $(x, fd(x))$ sont appelées *arêtes* de B , à gauche (resp. à droite).

Un sommet x de l'arbre binaire B est appelé *sommet double* (resp. *simple*, resp. *feuille*) ssi x a deux fils, (resp. un seul fils, resp. pas de fils). Les sommets simples se classifient en sommets *simples à gauche* (resp. *simples à droite*) selon que l'unique fils est fils à gauche (resp. fils à droite).

Exemple:



$fg(3) = 6$, $fd(3) = 2$

fil gauche fil droit

sommets doubles : 1,3

sommets simples $\left\{ \begin{array}{l} \text{à gauche: 5} \\ \text{à droite: 2} \end{array} \right.$

feuilles : 4,6,7

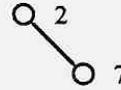
Figure 4.

Les arbres $g(B)$ et $d(B)$ sont des *sous-arbres* de B et par récursivité cette notion s'étend en disant que le sous-arbre d'un sous-arbre de B est un sous-arbre de B .

Soit s et t deux sommets de B . Un *chemin* allant de s à t est une suite de sommets $s_0 = s, s_1, \dots, s_p = t$ telle que pour $0 \leq i < p$, s_{i+1} est un fils de s_i . Un tel chemin existe ssi t est un sommet du sous-arbre de racine s ; ce chemin est alors unique.

Le chemin tel que $s_0 = r(B)$, s_{i+1} est fils gauche de s_i pour $0 \leq i < p$, et $s_p = t$ n'a pas de fils à gauche, est appelé *branche principale à gauche* de B . En remplaçant "fils gauche" par "fils droit", on a aussi la notion de *branche principale à droite*.

Exemple : Pour l'arbre B de la figure 4, (1, 3, 2, 7) est un chemin allant de 1 à 7. La branche principale gauche (resp. droite) est (1, 3, 6) (resp. (1, 5)). L'arbre binaire est un sous arbre de B.



La hauteur $h(x)$ (resp. hauteur à gauche $hg(x)$, resp. hauteur à droite $hd(x)$) du sommet x dans l'arbre binaire B est définie par les récurrences suivantes:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} hg(r(B)) = 0 & , \quad hd(r(B)) = 0, \\ hg(fg(x)) = 1 + hg(x), & hg(fd(x)) = hg(x), \\ hd(fg(x)) = hd(x) & , \quad hd(fd(x)) = 1 + hd(x), \\ h(x) & = hg(x) + hd(x). \end{array} \right.$$

En quelque sorte, $h(x)$ (resp. $hg(x)$, resp. $hd(x)$) est le nombre d'arêtes (resp. arêtes à gauche, resp. arêtes à droite) que l'on rencontre lorsque l'on suit le chemin allant de r à x .

Exemple: Pour l'arbre B de la figure 4, $hg(7) = 1$, $hd(7) = 2$, $h(7) = 3$.

Définition 1.6 - Un *arbre binaire complet* est un arbre binaire n'ayant pas de sommets simples.

Tout arbre binaire complet ayant n sommets doubles a $n + 1$ feuilles. Dans ce cas, on appelle aussi les sommets doubles "*sommets internes*" et les feuilles "*sommets externes*".

Les arbres binaires complets ayant $2n + 1$ sommets sont également dénombrés par le nombre de Catalan C_n .

La figure 5 montre une bijection ϵ entre les arbres binaires ayant n sommets et les arbres binaires complets ayant $2n + 1$ sommets.

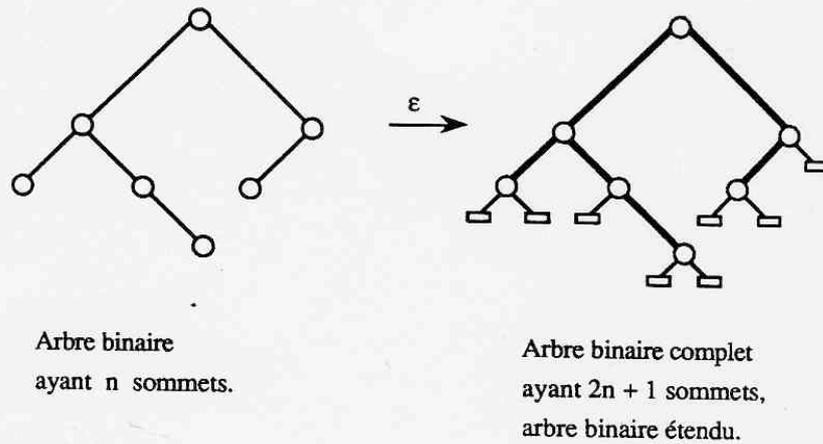


Figure 5. La bijection ε entre arbres binaires et arbres binaires complets.

L'arbre $\varepsilon(B)$ s'obtient en "rajoutant" des feuilles à tous les sommets de B où il manque un fils à gauche ou un fils à droite. L'application réciproque ε^{-1} revient à "enlever" toutes les feuilles de l'arbre binaire complet. L'arbre binaire complet $\varepsilon(B)$ est appelé *l'arbre binaire étendu* de B .

Parcours d'un arbre binaire

Il existe diverses méthodes (très classiques en Informatique théorique) pour définir un ordre total sur les sommets d'un arbre binaire (c'est-à-dire "parcourir" ou "visiter" les sommets de l'arbre).

a) Ordre préfixe ou préordre

Définition 1.7 - Le parcours est défini de façon récursive: pour $B = (g(B), r, d(B))$ on visite d'abord la racine r , puis le sous-arbre $g(B)$ en ordre préfixe, puis le sous-arbre $d(B)$ en ordre préfixe. (Voir figure 6)

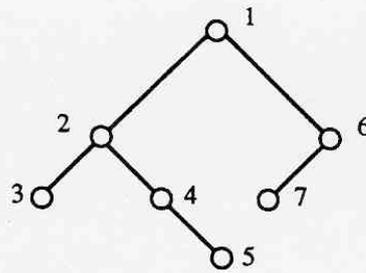


Figure 6. Parcours en ordre préfixe d'un arbre binaire.

En langage de type "Pascal", cet algorithme de parcours peut s'écrire de la façon suivante:

```

procédure PREORDRE (B)
  {B arbre binaire}
début si B ≠ ∅ alors VISITE (r(B));
           PREORDRE (g(B)); PREORDRE (d(B))
fin
  
```

Exercice 1.8 - (Informatique)

Cette procédure récursive peut s'implémenter de façon non récursive avec une pile P.

b) Ordre symétrique

Définition 1.9 - Pour parcourir en *ordre symétrique* les sommets d'un arbre binaire $B=(g(B)),r, d(B)$, on parcourt d'abord le sous-arbre gauche $g(B)$ puis la racine, puis le sous-arbre droit $d(B)$.

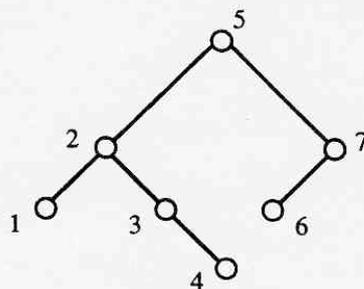


Fig.7. Parcours en ordre symétrique d'un arbre binaire.

Exemple:

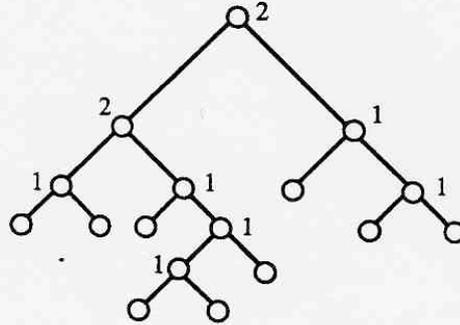


Figure 8. Nombres de Strahler.

Soit $R_{n,p}$ le nombre d'arbres binaires complets ayant $2n + 1$ sommets et nombre de Strahler p . Notons $R_p(t)$ la série génératrice.

$$(8) \quad R_p(t) = \sum_{n \geq 0} R_{n,p} t^n .$$

Démontrer la relation de récurrence suivante:

$$(9) \quad R_{p+1}(t) = t R_p^2(t) + 2t R_{p+1}(t) \left(\sum_{1 \leq i \leq p} R_i(t) \right) .$$

Avec la condition initiale $R_0 = 1$, ceci permet de calculer $R_p(t)$. En particulier, montrer que

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \frac{t}{1 - 2t} , \\ &= \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} t^n . \\ R_2(t) &= \frac{t^3}{1 - 6t + 10t^2 - 4t^3} . \end{aligned}$$

La table des premières valeurs des nombres $R_{n,p}$ est la suivante:

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	4	8	16	32	64	128	256
2			1	6	26	100	364	1288	4486
3							1	14	118

Table 2. Distribution des arbres selon leur nombre de Strahler.

Le paramètre "nombre de Strahler" fut introduit pour la première fois par Horton et Strahler en Hydrogéologie, pour l'étude de la "forme" des bassins fluviaux. Depuis il est réapparu dans l'étude des formes de structures arborescentes naturelles: arbres en botanique, éclairs en physique, molécules biologiques d'ARN, etc.

b) Arbres planaires

Définition 1.14 - Un *arbre planaire (étiqueté)* sur $S \neq \emptyset$ est la donnée de $A = (r; A_1, \dots, A_p)$ dans lequel $r \in S$, chaque A_i est un arbre planaire étiqueté sur E_i , $p \geq 0$ et $(\{r\}, A_1, \dots, A_p)$ est une partition de E (en parties non vides).

D'autres dénominations sont: *arbre ordonné*, *arbre planaire enraciné* ou encore *arbre de Catalan*. Dans ce chapitre, nous dirons encore *arbre (étiqueté)* pour simplifier.

Exemple:

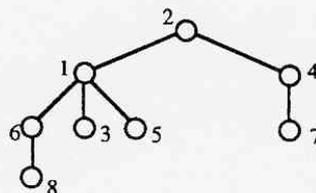


Figure.9. Arbre (planaire étiqueté) sur $S=\{1,2,\dots,8\}$.

Comme pour les arbres binaires, on définit la notion d'isomorphisme d'arbres (planaires).

Définition 1.15. On appelle *arbre planaire* (ou *arbre*) un arbre planaire étiqueté défini à un automorphisme près.

exemple:

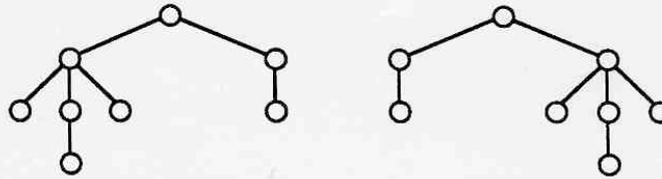


Figure 10. Deux arbres (planaires) différents.

Rappelons que l'ensemble des sous-arbres A_1, \dots, A_p est ordonné.

Comme pour les arbres binaires on définit les notions de *sommet*, *sous-arbre*, *fil* et *père*, *feuille*, *chemin* et *hauteur*. Ici on parle de 1^{er} fils, 2^{ième} fils, ... Les fils d'un même sommet sont *frères* (on aurait pu aussi désigner par filles et soeurs!).

Parcours préfixe:

Définition 1.16 - On parcourt d'abord la racine r , puis successivement les sous-arbres A_1, A_2, \dots, A_p en ordre préfixe.

Exemple:

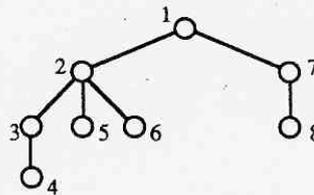


Figure 11. Parcours préfixe d'un arbre (planaire).

Définition 1.17 - On appelle *forêt d'arbres* un ensemble ordonné (A_1, \dots, A_p) d'arbres (planaires).

Bijection 1.18 - Les arbres $(n + 1)$ sommets sont en bijection avec les forêts d'arbres ayant n sommets. Il suffit d'associer à l'arbre (r, A_1, \dots, A_p) la forêt (A_1, \dots, A_p) .

Bijection 1.19 - Les arbres binaires ayant n sommets sont en bijection avec les forêts d'arbres ayant n sommets. La bijection est schématisée sur la figure 12.

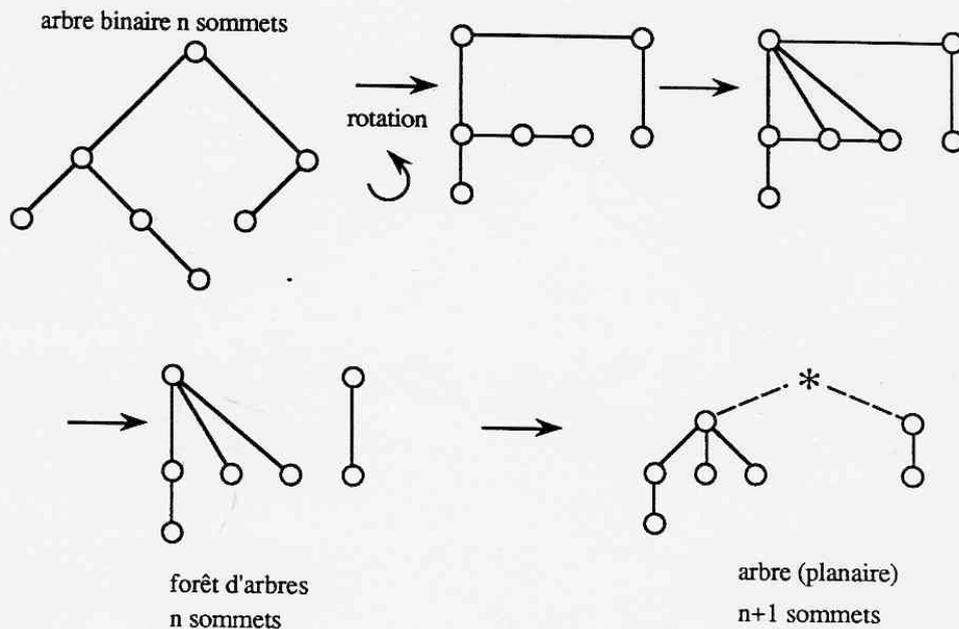


Figure 12. Les bijections arbre binaire \rightarrow forêt d'arbres et forêt d'arbres \rightarrow arbre.

La première étape consiste à effectuer une rotation de 45° de l'arbre binaire afin que sa branche droite principale devienne horizontale. Ensuite on rajoute des arêtes chaque fois que l'on a la situation suivante:



Puis on enlève les arêtes verticales pour obtenir une forêt d'arbres. Le nombre d'arbres est le nombre d'éléments de la branche droite principale. La hauteur à gauche d'un sommet de l'arbre binaire devient la hauteur du sommet correspondant dans la forêt d'arbres.

Remarquons que l'on aurait pu définir une autre bijection en faisant la rotation dans l'autre sens, amenant la branche gauche principale à être horizontale. Nous l'appellerons *bijection 1.19 duale*.

§ 2 - Chemins de Dyck et de Motzkin

a) Chemins et mots de Dyck

Définition 2.1 - Un *chemin de Dyck* (ou encore *chemin de Catalan*) est un chemin $w = (s_0, \dots, s_{2n})$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $s_0 = (0, 0)$, $s_{2n} = (2n, 0)$ et pour tout i , $0 \leq i < 2n$, le pas (s_i, s_{i+1}) est un pas élémentaire Nord-Est ou Sud-Est.

Définition 2.2 - Un *mot de Dyck* est un mot $w \in \{x, \bar{x}\}^*$ vérifiant les deux conditions.

- (i) $|w|_w = |w|_{\bar{x}}$,
- (ii) pour toute factorisation $w = uv$, alors $|u|_x \geq |u|_{\bar{x}}$.

Les chemins de Dyck de longueur $2n$ sont en bijection avec les mots de Dyck $w = x_1, \dots, x_{2n}$ de longueur $2n$: il suffit d'associer à tout pas (s_{i-1}, s_i) Nord-Est (resp. Sud-Est) la lettre $x_i = x$ (resp. $x_i = \bar{x}$).

Exemple:

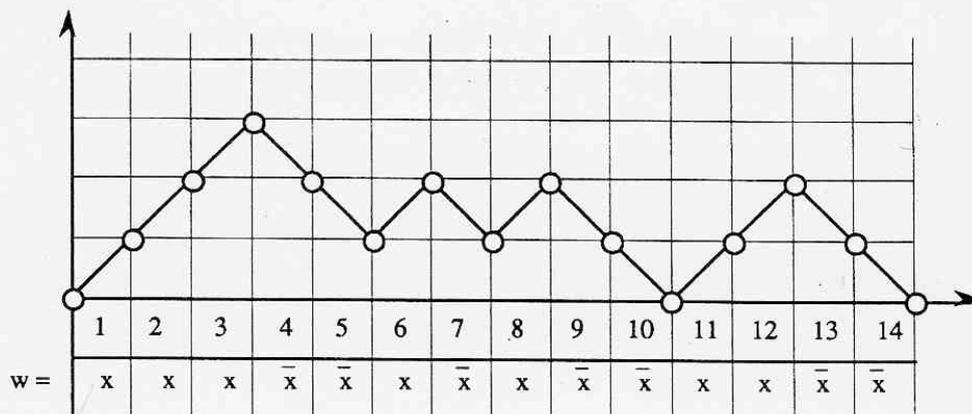


Figure 13.

Un chemin de Dyck (ou chemin de Catalan) et le mot de Dyck associé.

Lemme 2.3 - *Tout mot de Dyck w non vide se factorise de manière unique sous la forme :*

$$(10) \quad w = x u \bar{x} v \quad , \quad \text{avec } u \text{ et } v \text{ mots de Dyck.}$$

La lettre \bar{x} de la factorisation (10) correspond à la première fois où le chemin de Dyck associé retouche l'axe horizontal (au niveau 0).

Ainsi tout mot de Dyck de longueur $2n$ est soit vide ($n = 0$) , soit en bijection avec une paire (u, v) de deux mots de Dyck de longueurs $|u| + |v| = 2n - 2$. Ce fait se traduit par la relation

suivante pour la série génératrice $f(t) = \sum_{n \geq 0} a_{2n} t^{2n}$ des mots de Dyck de longueur $2n$.

$$(11) \quad f(t) = 1 + t^2 f^2(t) .$$

D'après (3), on a $a_{2n} = C_n$, le nombre d'arbres binaires (resp. complets) ayant n sommets (resp. $2n + 1$ sommets).

Bijection 2.4 - Mots de Dyck \longleftrightarrow Arbres binaires complets.

Soit B un arbre binaire complet ayant $2n + 1$ sommets. On numérote les sommets $1, 2, \dots, 2n + 1$ dans l'ordre préfixe (définition 1.7). On associe $w = \varphi(B)$ le mot $w = x_1, x_2 \dots x_{2n}$ avec

$$(12) \quad x_i = x \text{ (resp. } \bar{x} \text{) ssi le sommet numéroté } i \text{ est point double (resp. feuille) de } B.$$

L'application φ est une bijection de l'ensemble des arbres binaires complets ayant $2n + 1$ sommets sur l'ensemble des mots de Dyck de longueur $2n$. Voir un exemple sur la figure 14.

Le lecteur démontrera que $\varphi(B)$ est bien un mot de Dyck, que φ est une bijection et explicitera la bijection inverse.

Exemple:

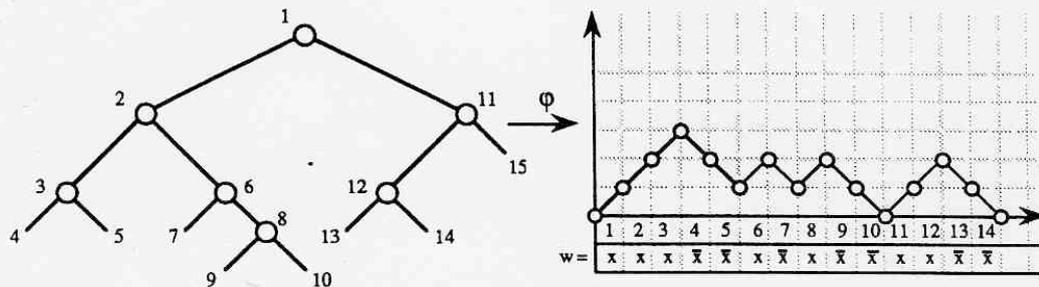


Figure 14.

La bijection - arbres binaires complet \rightarrow mots (ou chemins) de Dyck.

Bijection 2.5 - Mots de Dyck \rightarrow arbres planaires.

Soit A un arbre (planair) ayant $n + 1$ sommets. Nous ordonnons les sommets de A en ordre préfixe s_0, s_1, \dots, s_n . Rappelons que pour tout arbre A et pour tous sommets u, v de A , il existe un unique *chemin* allant de s à t , c'est-à-dire une suite $u_0 = u, u_1, \dots, u_p = v$ telle que:

$$(13) \quad \forall i, 0 \leq i < p, u_{i+1} \text{ est fils ou père de } u_i.$$

Nous parcourons les sommets de A en ordre préfixe s_0, \dots, s_n . Si s_i est fils de s_{i-1} , alors on écrit $w_i = x$. Si s_i n'est pas fils de s_{i-1} , alors on suit l'unique chemin allant de s_{i-1} à s_i . Notons $u_0 = s_{i-1}, u_1, \dots, u_p = s_i$ ce chemin. On lui associe le mot $w_i = x_1 \dots x_p$ avec $x_j = x$ ou \bar{x} selon que u_j est fils ou père de u_{j-1} .

En fait, on peut remarquer que w_i a la forme de $\bar{x}^{p-1} x$ dans lequel (hauteurs des sommets s_i et s_{i-1} dans A) $p - 1 = 1 + h(s_{i-1}) - h(s_i)$. Enfin, par convention, on pose $s_{n+1} = s_0$ et $w_{n+1} = \bar{x}^{p-1}$ avec $p - 1 = h(s_n)$.

On définit enfin:

$$(14) \quad \varphi(A) = w_1 w_2 \dots w_n w_{n+1}.$$

Exemple:

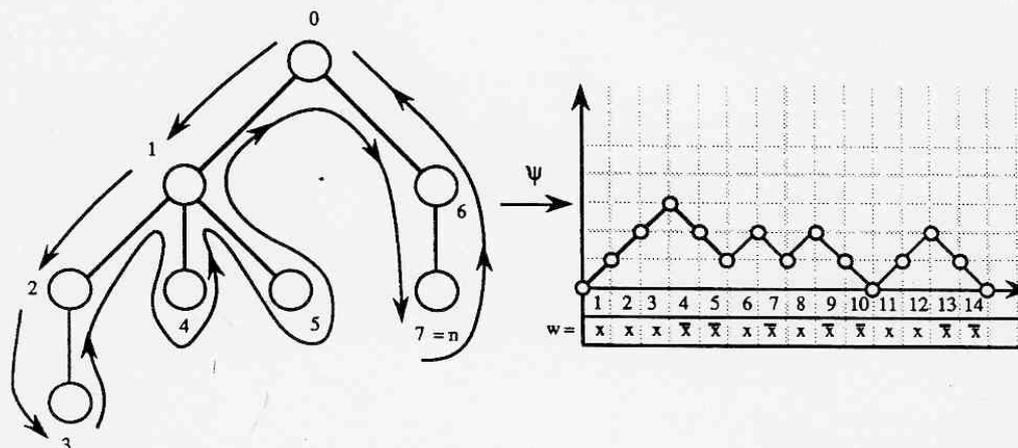


Figure 15. La bijection arbres planaires $((n+1)$ sommets) \longrightarrow
mots (ou chemins) de Dyck (longueur $2n$)

L'application ϕ peut être aussi décrite en termes imagés de la façon suivante: les arêtes de l'arbre A sont des murs (vue d'en haut). Un observateur part de la racine s_0 et suit ces murs en les touchant toujours avec sa main gauche. Au début il se dirige vers s_1 . Il va parcourir les sommets de A . Chaque fois qu'il s'éloigne de s_0 on écrit x , chaque fois qu'il revient vers s_0 , on écrit \bar{x} .

Le lecteur vérifiera que $\phi(A)$ est bien un mot de Dyck et que l'application ϕ est une bijection entre les arbres ayant $n + 1$ sommets et les mots de Dyck de longueur $2n$. Il explicitera aussi la bijection inverse.

Remarque 2.6 - Soit $i, 1 \leq i \leq n$. Soit x_i la $i^{\text{ème}}$ lettre x du mot de Dyck $w = \phi(A)$ (en lisant de gauche à droite), c'est-à-dire $w = ux_1v$ avec $|ux_1|_x = i$. Alors la hauteur $h(s_i)$ du $i^{\text{ème}}$ sommet (pour l'ordre préfixe) s_i de A est $h(s_i) = \delta(ux_i)$ avec $\delta(ux_i) = |ux_i|_x - |ux_i|_{\bar{x}}$.

Exercice 2.7 - Aux § 1 et 2, on a défini des bijections entre les objets combinatoires suivants: chemins (ou mots) de Dyck de longueur $2n$, arbres ayant $n + 1$ sommets, forêts d'arbres ayant n sommets, arbres binaires ayant n sommets, arbres binaires complets ayant $2n + 1$ sommets.

Démontrer (ou à défaut constater) que le diagramme suivant est commutatif:

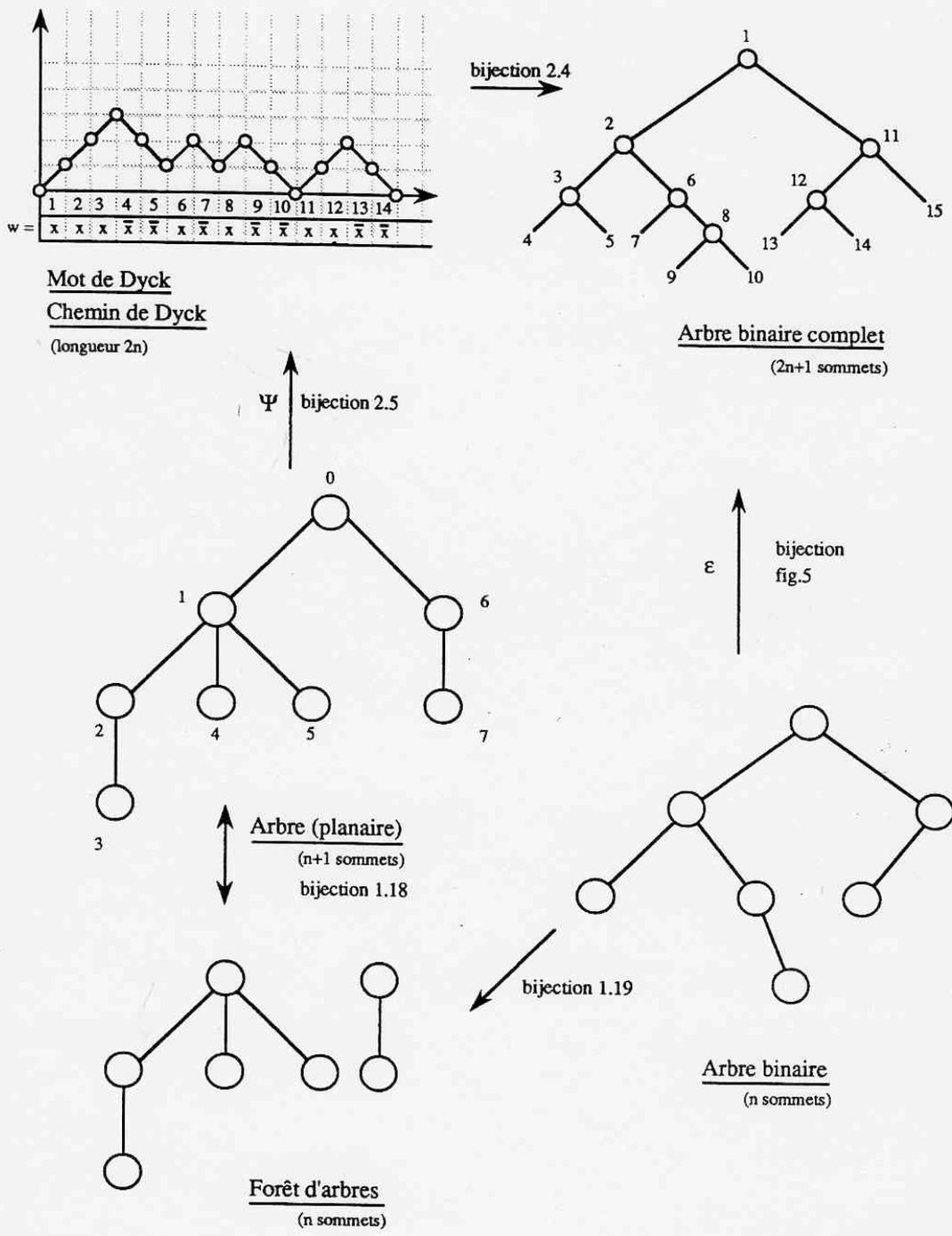


Fig. 16. Diagramme commutatif des bijections ϕ, Ψ, ϵ

b) Chemins et mots de Motzkin

Définition 2.8 - Un *chemin de Motzkin* est un chemin $\omega = (s_0, \dots, s_n)$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $s_0 = (0, 0)$, $s_n = (n, 0)$ et pour tout i , $0 \leq i < n$, le pas élémentaire (s_i, s_{i+1}) est Nord-Est, Est, ou Sud-Est.

Définition 2.9 - Un *mot de Motzkin* est un mot $w \in \{a, x, \bar{x}\}^*$ vérifiant les conditions (i) et (ii) de la définition 2.2 caractérisant les mots de Dyck.

De manière analogue aux chemins et mots de Dyck, un chemin de Motzkin de longueur n est en bijection avec un mot de Motzkin de longueur n : un pas élémentaire Nord-Est (resp. Est, resp. Sud-Est) est associé à la lettre x (resp. a , resp. \bar{x}).

Exemple:

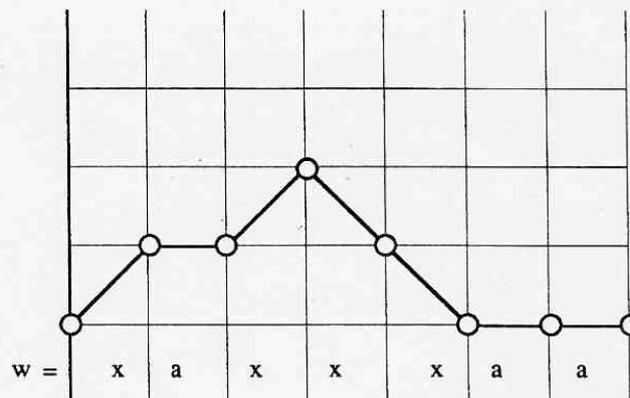


Figure 17. Chemins et mots de Motzkin.

Le nombre de mots (ou chemins) de Motzkin est appelé *nombre de Motzkin* et noté M_n . Les premières valeurs sont :

n		0	1	2	3	4	5	6
M_n		1	1	2	4	9	21	51

Table 3. Nombres de Motzkin.

Soit $m(t)$ la série génératrice des nombres de Motzkin:

$$(15) \quad m(t) = \sum_{n \geq 0} M_n t^n .$$

Lemme 2.10 - Pour tout mot w de Motzkin, nous avons l'une et l'une seulement des conditions suivantes:

- (i) $w = e$ (mot vide),
- (ii) $w = av$ avec v mot de Motzkin,
- (iii) $w = x u \bar{x} v$ avec u et v mots de Motzkin.

De plus les factorisations (ii) et (iii) sont uniques.

Le lemme 2.10 implique que $m(t)$ vérifie l'équation algébrique suivante:

$$(16) \quad m(t) = 1 + tm(t) + t^2 m^2(t) .$$

La série génératrice des nombres de Motzkin est ainsi une série algébrique de degré 2.

On pourrait résoudre (16) et écrire:

$$(17) \quad \sum_{n \geq 0} M_n t^n = \frac{1 - t - (1 - 2t - 3t^2)^{1/2}}{2t^2} .$$

Il n'existe pas de formule simple pour M_n analogue à celle existant pour le nombre de Catalan C_n .

Exercice 2.11. On considère n points sur un cercle. Démontrer que le nombre de Motzkin M_n est le nombre de façon de joindre ces points par des arcs continus deux à deux disjoints (ces arcs sont définis à homéomorphisme près et certains points peuvent être isolés), voir figure 18.

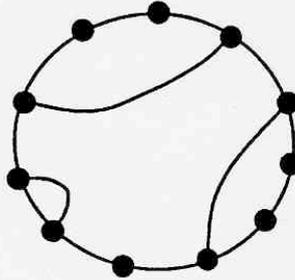


Figure 18.

Exercice 2.12. Démontrer l'identité suivante

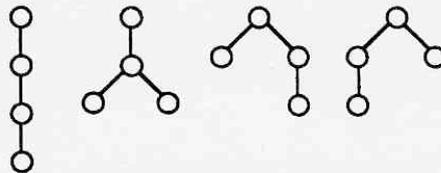
$$(18) \quad M_n = \sum_{0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} c_i.$$

($\lfloor p \rfloor$ désigne la partie entière de p et C_i le nombre de Catalan $(2i)! / i! / (i+1)!$).

Exercice 2.13. On appelle *arbre 1-2* un arbre (planaire) tel que tout sommet a au plus 2 fils. [ne pas confondre avec arbre binaire !].

Montrer que le nombre d'arbre 1-2 ayant $(n+1)$ sommets est le nombre de Motzkin M_n .

exemple: $M_3 = 4$



4 arbres 1-2 ayant 4 sommets.

Figure 19. Arbres 1-2.

c) Compléments: chemins et mots de Motzkin colorés:

Définition 2.14. Un *mot de Motzkin coloré* est un mot $w \in \{a, b, x, \bar{x}\}^*$ vérifiant les conditions (i) et (ii) de la définition 2.2 des mots de Dyck. Un *chemin de Motzkin coloré* est un chemin de Motzkin tel que les pas Est (ou *paliers*) sont colorés en 2 couleurs ("bleu" et "rouge" ou "b" et "a").

Les chemins de Motzkin colorés de longueur n sont en bijection avec les mots de Motzkin colorés de longueur n .

Soit a_n le nombre de mots (ou chemins) de Motzkin colorés de longueur n et soit $f(t)$ la série génératrice $f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$.

Exercice 2.15.

(i) démontrer la relation

$$(19) \quad f(t) = 1 + 2t f(t) + t^2 f^2(t)$$

(ii) en déduire que

$$(20) \quad a_n = C_{n+1}.$$

(iii) donner une preuve bijective de l'égalité (20) en construisant une bijection entre les mots de Motzkin colorés de longueur n et les arbres linéaires ayant $n+1$ sommets [on s'inspirera de la bijection 2.4 entre mots de Dyck et arbres binaires complets].

(iv) donner une preuve bijective de l'égalité (25) en construisant une bijection entre les mots de Motzkin colorés de longueur n et les mots de Dyck de longueur $2n+2$.

(v) utiliser les mots (ou chemins) de Motzkin colorés et la relation (20) pour donner une preuve bijective de l'identité suivante due à Touchard.

$$(21) \quad C_{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} 2^{n-2i} C_i$$

[remarque: comparer (21) avec (18)]

Exercice 2.15. Polyomino parallélogramme.

Un *polyomino parallélogramme* est un polyomino (voir définition à l'exemple 1.4, ch.I) tel que l'intersection avec toute droite perpendiculaire à la diagonale principale est connexe.

Ceci équivaut à dire que le bord du polyomino est formé par deux chemins disjoints (sauf aux extrémités) et ayant des pas élémentaires Nord ou Est.

Exemple:

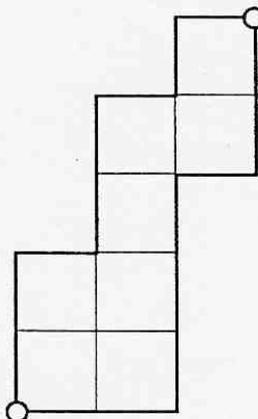


Figure 20. Un polyomino parallélogramme.

Donner une bijection entre les polyominos parallélogrammes de périmètre $2n+4$ et les mots de Motzkin colorés de longueur n . [l'idée est de couper le polyomino par des droites perpendiculaires à la diagonale principale, d'équation $y = -x + k$, k entier]. On en déduit donc que le nombre de tels polyominos est C_{n+1} .

d) Compléments: chemins et mots de Lukasiewicz.

Définition 2.16. Un *chemin de Lukasiewicz* est un chemin ω de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dont les pas élémentaires (s_i, s_{i+1}) sont tels que:

$$s_i = (x_i, y_i), \quad s_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1}) \quad \text{avec } y_{i+1} \geq y_i - 1$$

Définition 2.17. Soit X l'alphabet (infini) $X = \{x_{-1}, x_0, \dots, x_p, \dots\}$. Notons δ le morphisme de monoïde $\delta : X^* \rightarrow \mathbb{Z}$ défini de manière unique par

$$(22) \quad \delta(x_i) = i.$$

Un *mot de Lukasiewicz* est un mot $w \in X^*$ vérifiant les deux conditions

$$(i) \quad \delta(w) = -1$$

$$(ii) \quad \text{Pour tout facteur gauche } u \text{ de } w, \quad \delta(u) \geq 0.$$

Exemple.

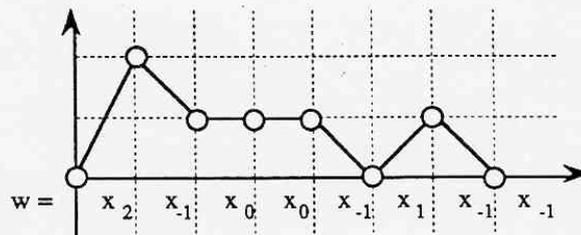


Figure 21. Un chemin (resp. mot) de Lukasiewicz.

On définit une bijection entre les chemins de Lukasiewicz de longueur n et les mots de Lukasiewicz de longueur $n+1$ en associant à tout pas élémentaire allant du niveau k au niveau ℓ la lettre $x_{\ell-k}$ et en rajoutant la lettre x_{-1} à la fin.

Exercice 2.18.

(i) Soit A un arbre binaire ayant $(n+1)$ sommets. Soit $(s_1, s_2, \dots, s_{n+1})$ la suite des sommets de A ordonnés en ordre préfixe. On associe le mot $\lambda(A)$ de X^* par la règle suivante:

la $i^{\text{ème}}$ lettre de $\lambda(A)$ est x_{j-1} si s_i a j fils.

Exemple:

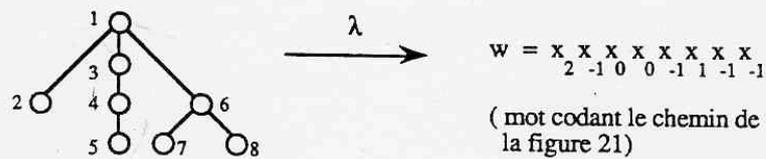
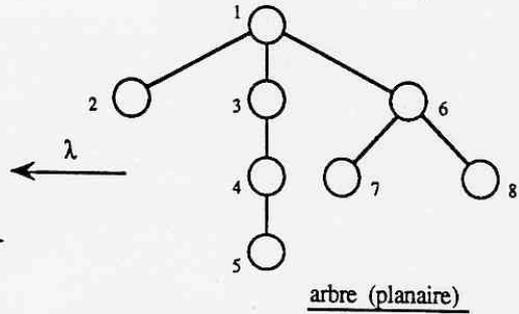
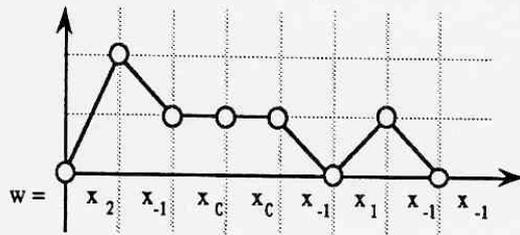


Figure 22. Bijection arbres \rightarrow mots de Lukasiewicz.

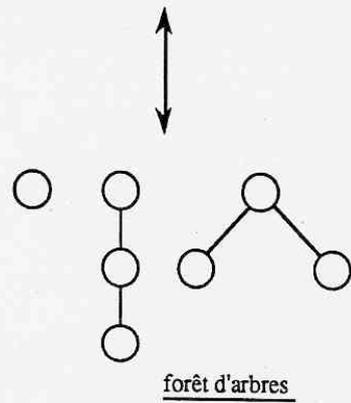
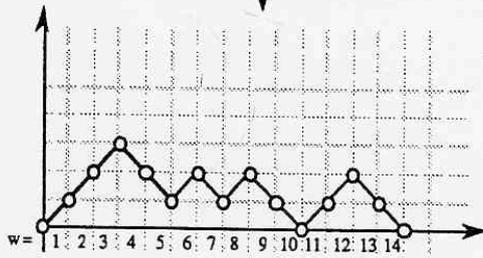
Montrer (ou à défaut constater !) que λ est une bijection entre les arbres ayant $(n+1)$ sommets et les mots de Lukasiewicz de longueur $(n+1)$.

(ii) En composant λ^{-1} avec la bijection "duale" 1.19 (c'est-à-dire comme sur la figure 12, mais avec une rotation amenant la branche gauche principale de l'arbre binaire à être horizontale), puis ε (arbre binaire étendu) puis en associant le chemin de Dyck (bijection 2.4), on obtient ainsi une bijection entre mots de Lukasiewicz de longueur $n+1$ (ou chemins de Lukasiewicz de longueur n) et mots de Dyck (ou chemins de Dyck) de longueur $2n$. Cette bijection peut être décrite directement de manière simple.

L'exercice consiste à définir directement cette bijection. Un exemple est donné sur la figure 22.

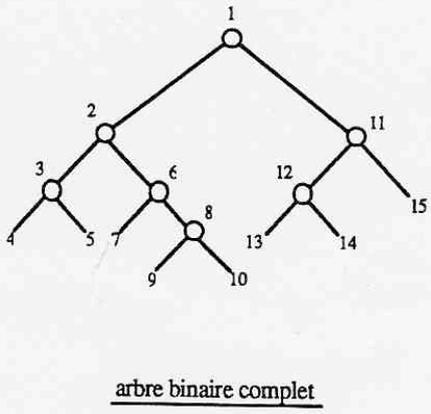


↕ ?



Chemin de Dyck
Bijection 2.4

bijection 1.19
"duale"



(arbre binaire étendu)
← ε

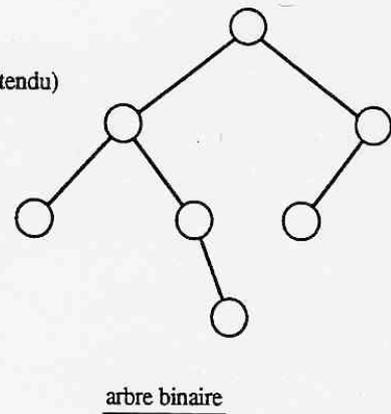


Fig.23 Trouver la bijection manquante

Exercice 2.19. Soit un entier $p \geq 1$. Notons L_p le langage formé par les mots de Lukasiewicz n'utilisant que les lettres $x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_p$. Soit $f_p(t)$ la série génératrice pour les nombres de mots de L_p de longueur n .

Montrer que $f_p(t)$ est algébrique de degré $p+1$. Plus précisément $f_p(t)$ satisfait l'équation

$$(23) \quad f_p(t) = t \left[1 + f_p(t) + f_p^2(t) + \dots + f_p^{p+1}(t) \right]$$

e) Compléments: chemins et mots du "grand Dyck"

Définition 2.10. Les chemins du "grand Dyck" sont les chemins $\omega = (s_0, \dots, s_{2n})$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, tels que $s_0 = (0, 0)$, $s_{2n} = (2n, 0)$ et n'ayant que des pas élémentaires Nord-Est et Sud-Est.

Définition 2.11. Un mot $w \in \{x, \bar{x}\}^*$ est appelé mot du "grand Dyck" ssi il vérifie la condition

$$|w|_x = |w|_{\bar{x}}$$

Ces mots et chemins contiennent les mots et chemins de Dyck. Similairement, les mots du grand Dyck sont en bijection avec les chemins du grand Dyck.

Le nombre a_n de tel mots (ou chemins) de longueur n est

$$(24) \quad a_n = \binom{2n}{n}$$

Exercice 2.12. Montrer que la série génératrice pour le nombre a_n de mots du grand Dyck de longueur $2n$ est algébrique et est en fait égale à

$$(25) \quad \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$$

[ne pas développer $(1-4t)^{-1/2}$, mais établir ce résultat en écrivant un système d'équations algébriques, de manière analogie à (11), (16), (19) ou (23)].

f) Compléments: quelques exemples d'objets combinatoires ayant des séries génératrice algébriques

(La démonstration que les séries génératrices satisfont bien les équations ci-dessous est difficile, hors de portée de ce cours).

(i) Animaux dirigés

Définition 2.13. Un *animal dirigé sur réseau carré* (resp. sur *réseau triangulaire*) est un ensemble E de points de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vérifiant les 2 conditions suivantes:

- (i) $(0,0) \in E$
- (ii) tout point $(x,y) \in E$ peut être atteint par un chemin $\omega=(s_0, s_p)$ tel que $s_0 = (0,0)$, $s_p=(x,y)$, $s_i \in E$ pour $0 \leq i \leq p$, et le chemin n'a que des pas Nord ou Est (resp. Nord, Est ou Nord-Est).

Exemple:

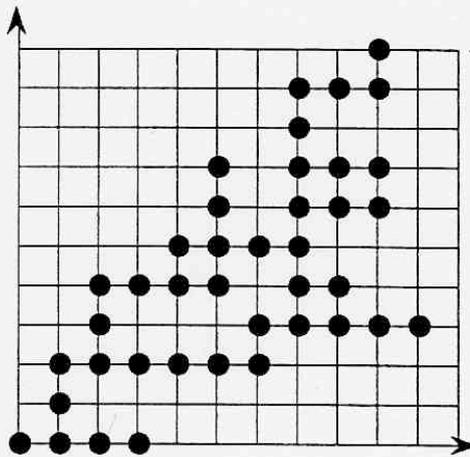


Fig. 24 Un animal dirigé sur réseau carré

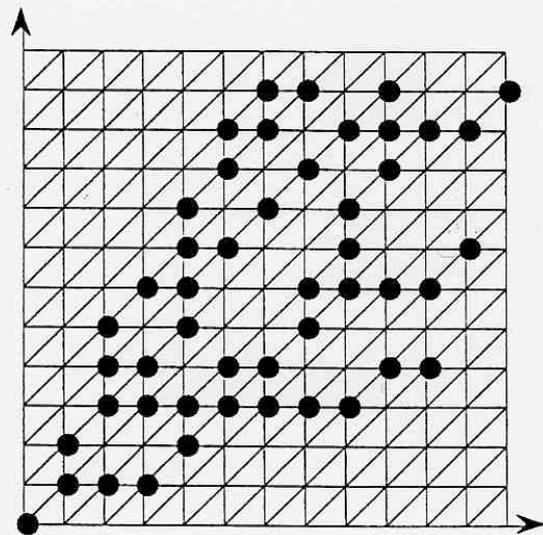


Fig.25 Un animal dirigé sur réseau triangulaire

Soit a_n (resp. b_n) le nombre d'animaux dirigés ayant n points sur réseau carré (resp. triangulaire).

Le nombre b_n d'animaux dirigés sur réseau triangulaire est $1/2 \binom{2n}{n}$. Ce résultat est aussi simple que sa preuve est difficile. Ainsi il existe une bijection entre ces animaux ayant n points et les mots du grand Dyck, de longueur $2n$ et commençant par x .

Plus difficile est de démontrer qu'il existe une bijection entre les animaux dirigés sur réseau carré ayant $(n+1)$ points et les mots de longueur n qui sont facteurs gauches de mots de Motzkin, c'est-à-dire les mots $w \in \{a, x, \bar{x}\}^*$ vérifiant la condition (ii) de la définition 2.2 des mots de Dyck:

pour toute factorisation $w = uv$, $|u|_x \geq |u|_{\bar{x}}$.

Exercice: démontrer que la série génératrice $f(t)$ de tels mots vérifie l'équation

$$(26) \quad f(t) = 1 + 2t f(t) + t^2 f(t) m(t), \text{ avec } m(t) = \sum_{n \geq 0} M_n t^n,$$

série génératrice des nombres de Motzkin, et que le nombre de tels mots de longueur n est

$$(27) \quad a_{n+1} = \sum_{0 \leq i} \binom{n}{i} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor}.$$

L'intérêt d'une bijection entre les animaux dirigés sur réseau triangulaire et les mots du grand Dyck commençant par x est de pouvoir générer un animal dirigé aléatoire de taille donnée n avec n assez grand (par exemple $n = 10^5$).

(aléatoire signifie que chaque animal apparaît avec la probabilité $1/b_n$).

L'exercice 1.12 permet de générer aléatoirement un arbre binaire de taille n . D'autre part une preuve bijective de l'identité $(n+1) C_n = \binom{2n}{n}$ permet de générer aléatoirement un mot du grand Dyck. En combinant ces bijections qui peuvent toutes trois s'implémenter sur un ordinateur en "temps linéaire", on obtient ainsi des animaux dirigés aléatoires de très grosse taille. La figure suivante en donne un exemple.

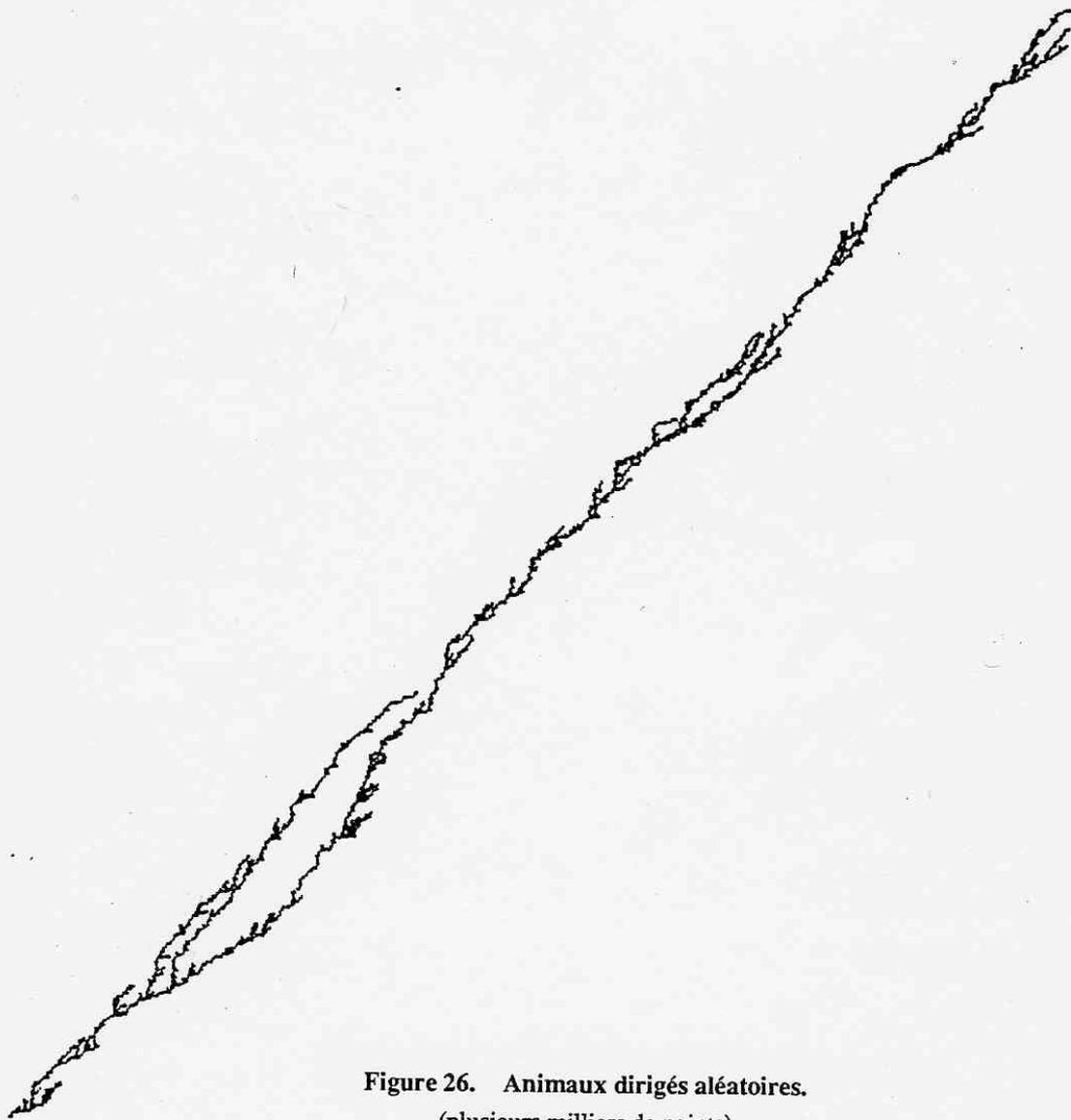


Figure 26. Animaux dirigés aléatoires.
(plusieurs milliers de points)

(ii) **Polyominos verticalement convexes.**

Nous reprenons les polyominos verticalement convexes de l'exercice 5.5, ch.I. La série génératrice de ces polyominos énumérés selon la surface (nombre de carrés élémentaires) est une série rationnelle. L'énumération de ces polyominos selon le périmètre est nettement plus difficile. La série génératrice est algébrique de degré ≤ 4 , (comme l'a démontré M. Delest, voir J. of Combinatorial Th. A, 48 (1988) 12-31).

Plus précisément, soit a_n le nombre de polyominos verticalement convexes de périmètre $2n+2$. La série génératrice $f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ est solution de l'équation algébrique suivante:

$$(28) \quad \begin{cases} (2t^6 - 23t^5 + 38t^4 - 18t^3) f^4(t) + (5t^6 - 40t^5 + 82t^4 - 68t^3 + 21t^2) f^3(t), \\ + (4t^6 - 30t^5 + 68t^4 - 70t^3 + 36t^2 - 8t) f^2(t) \\ + (t^6 - 10t^5 + 27t^4 - 32t^3 + 19t^2 - 6t + 1) f(t) - t^5 + 4t^4 - 6t^3 + 4t^2 - t = 0 \end{cases}$$

(iii) **Polyominos convexes**

Similairement aux polyominos verticalement convexes, on pourrait définir les polyominos *horizontalement convexes*. (voir ex. 5.5, Ch.I)

Définition 2.14. Un *polyomino convexe* est un polyomino à la fois verticalement et horizontalement convexe.

Exemple:

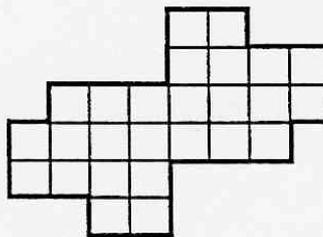


Figure 27. Un polyomino convexe.

Les polyominos tas (exemple 1.4, ch I) et les polyominos parallélogrammes (exercice 2.15, ch. II) sont des exemples de polyominos convexes.

Soit p_{2n} le nombre de polyominos convexes ayant le périmètre $2n$. Il a été démontré par M. Delest et X.G. Viennot (voir *Theoretical Computer Science*, 34 (1984) 169-206) que la série génératrice des nombres p_{2n} est algébrique et égale à

$$(29) \quad \sum_{n \geq 2} p_{2n} t^{2n} = \frac{t^4 (1-6t^2 + 11t^4 - 4t^6)}{(1-4t^2)^2} - 4t^8 (1-4t^2)^{-3/2}.$$

De l'égalité (29) on déduit aisément une formule exacte pour p_{2n} :

$$(30) \quad \text{pour } n \geq 0, p_{2n+8} = (2n+11) 4^n - 4(2n+1) \binom{2n}{n}.$$

Trouver une preuve entièrement bijective de (30) est [était] un problème ouvert à l'heure où l'auteur écrit [écrivait] ces lignes (novembre 1986). L'auteur offre [offrirait] dix bouteilles du vin qu'il fait à l'Isle-Saint-Georges dans la région bordelaise ("domaine des mates", 1982) pour la première preuve *entièrement bijective*. L'heureux gagnant devra venir chercher les bouteilles à l'Isle-Saint-Georges. [Le problème a été partiellement résolu en 1987 par D. Stanton et qui en donnent une preuve analytique que l'on pourrait transformer en bijection. D'autre part une autre preuve analytique simple vient d'être trouvée par les Physiciens K.Y. Lin et S.J. Chang en 1988, après que la formule exacte (29) ait été conjecturé par A.J. Guttmann et I.G. Enting]

(iv) Cartes planaires.

Définition 2.15 Une *carte planaire* est un ensemble de points du plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, joints par des arcs simples du Jordan deux à deux disjoints (sauf éventuellement aux extrémités). Ces arcs sont définis à homéomorphisme près, en fait sur la sphère de dimension 2 (c'est-à-dire le plan complété d'un point à l'infini).

Il est plus facile d'énumérer les *cartes planaires pointées*, c'est-à-dire les cartes telles qu'une arête (s,t) a été distinguée.

Exemple:

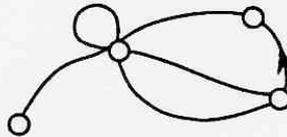


Figure 28. Une carte planaire pointée.

Soit a_n le nombre de cartes planaires pointées ayant n arêtes.

Soit $f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$. W. Tutte a démontré (1962) que $f(t)$ était solution du système d'équation algébrique suivant:

$$(31) \quad \begin{cases} f(t) = (1 - 4g(t))(1 - 3g(t))^{-2}, \\ g(t) = t(1 - 3g(t))^{-1}. \end{cases}$$

Nous verrons dans la suite de ce chapitre, que l'on peut déduire de (31) la formule exacte

$$(32) \quad a_n = \frac{2 \cdot 3^n (2n)!}{n! (n+2)!}$$

$$(c'est-à-dire aussi $a_n = \frac{2 \cdot 3^n}{n+2} C_n$)$$

La deuxième équation de (31) s'écrit aussi $g(t) = t + 3g^2(t)$. En posant $g(t) = th(t)$, il vient $h(t) = 1 + 3th^2(t)$, équation analogue à celle donnant les nombres de Catalan. Le coefficient de t^n dans $h(t)$ est $3^n C_n$. La première équation s'écrit alors

$$\begin{aligned} f(t) &= (1 - 4th(t))h^2(t) \\ \text{soit } f(t) &= h(t) - th^3(t). \end{aligned}$$

Une démonstration bijective de cette dernière équation a été donnée par R. Cori et B. Vauquelin (Canad. J. Math., vol. XXXIII, 1981, pp. 1032-1042).

§3. Algébricité, D-finitude et P-récurtivité

Définition 3.1 Une suite $\{a_n\}_{n \geq 0}$ de nombres complexes est dite *polynomialement réursive* (ou aussi *P-réursive*) ssi il existe des polynômes P_0, \dots, P_k de $\mathbb{C}[x]$ tels que pour n assez grand on ait la récurrence suivante.

$$(34) \quad P_k(n) a_{n+k} + P_{k-1}(n) a_{n+k-1} + \dots + P_0(n) a_n = 0.$$

Exemple. D'après le théorème 2.1, ch.I, une suite $\{a_n\}_{n \geq 0}$ dont la série génératrice $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ est rationnelle est P-réursive.

Exemple. La suite $\{C_n\}_{n \geq 0}$ des nombres de Catalan est P-réursive d'après l'identité (6).

Proposition 3.2 Soit $f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ une série algébrique de degré k . Alors la suite $\{a_n\}_{n \geq 0}$ est P-réursive. Les polynômes $P_i(x)$ de (34) peuvent être choisis tels que $\deg P_i(x) < k$ et $P_k(x) \neq 0$.

Dans ce cours, la preuve est laissée de côté.

Remarque 3.3. La réciproque est fautive, comme le montre le contre-exemple $f(t) = e^t$.

Définition 3.4. Une série $y = \sum_{n > 0} a_n t^n$ de $\mathbb{C}[[t]]$ (resp. une suite $\{a_n\}_{n \geq 0}$) est dite *différentiellement finie* (ou aussi *D-finie*) ssi il existe des polynômes $P_0(t), \dots, P_k(t)$ de $\mathbb{C}[t]$ tels que $P_k(t) \neq 0$ et

$$(35) \quad P_k(t) y^{(k)} + \dots + P_1(t) y' + P_0(t) y = 0$$

Proposition 3.5. Soit $\{a_n\}_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes. Alors $\{a_n\}_{n \geq 0}$ est D-finie ssi elle est P-réursive.

Là aussi, la preuve est laissée de côté.

Exemple 3.6. Soit $y = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ l'unique solution de l'équation algébrique

$$2y^2 - (1+t)y + t = 0.$$

Par différentiation, il vient

$$4yy' - (1+t)y' - y + 1 = 0,$$

$$\text{soit } y' = (y-1)/(4y-1-t).$$

Les fonctions $1, y, y'$ sont linéairement dépendantes sur le corps $\mathbb{C}(x)$ des *séries de Laurent rationnelles* (voir cours d'algèbre). On cherche donc $A(t), B(t), C(t)$, polynômes tels que

$$A(t) + B(t)y + C(t)y' = 0$$

$$\text{soit } A(t) + B(t)y + C(t)\frac{y-1}{4y-1-t} = 0$$

Après multiplication par $4y-1-t$ et remplacement de y^2 par $((1+t)y-t)/2$, il vient

$$A(t) = t-1, B(t) = 3-t, C(t) = t^2-6t+1.$$

$$\text{Ainsi } y'(t^2-6t+1) - (t-3)y + (t-1) = 0.$$

Cette relation implique pour $n \geq 1$ la récurrence

$$(n+2)a_{n+2} - 3(2n+1)a_{n+1} + (n-1)a_n = 0.$$

Cet exemple donne au lecteur une idée de la preuve de la proposition 3.2.

§4. Formule d'inversion de Lagrange

Dans ce paragraphe nous donnons une formule permettant de calculer les coefficients de la série réciproque $f^{<-1>}(t)$ d'une série formelle $f(t)$. Cette formule est valable pour toute série formelle à coefficients dans un corps \mathbb{K} de caractéristique 0. Elle est particulièrement utile dans le cas des séries algébriques.

La série $f(t)$ admet une série réciproque $f^{<-1>}(t)$ ssi $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$ (voir ch.0). Ceci est équivalent à dire que l'on peut écrire $f(t)$ sous la forme suivante

$$(36) \quad f(t) = \frac{t}{\varphi(t)} \text{ avec } \varphi(0) \neq 0.$$

La série réciproque $y = f^{<-1>}(t)$ est alors l'unique solution de l'équation

$$(37) \quad y = t \varphi(y).$$

Proposition 4.1. (formule d'inversion de Lagrange)

Soit φ une série formelle, à coefficients dans un corps \mathbb{K} de caractéristique 0, telle que $\varphi(0) \neq 0$. L'équation (37) $y = t \varphi(y)$ admet une unique solution avec $y(0) = 0$.

Si $g(t)$ est une série formelle, le coefficient de t^n dans $g(y)$ est égal à

$$(38) \quad [t^n] g(y) = \frac{1}{n} \times [t^{n-1}] (g'(t) (\varphi(t))^n) \quad (n \geq 1)$$

Notation. Le coefficient de t^n dans la série formelle $f(t)$ est noté

$$[t^n] (f(t)).$$

Nous donnons deux preuves de cette formule classique, l'une analytique utilisant les *résidus*, l'autre combinatoire utilisant les chemins de Lukasiewicz (définition 2.16).

Preuve analytique (pour complément). Notons par "Rés $f(x)dx$ " le *résidu* au point 0 de la *fonction méromorphe* $f(x)$, c'est-à-dire le coefficient de x^{-1} dans la *série (de Laurent)* de $f(x)$ (voir cours sur les fonctions analytiques).

On a la relation fondamentale suivante (composition des résidus)

$$(39) \quad \text{Rés } f(x)dx = \text{Rés } f(u(t)) u'(t)dt.$$

Le coefficient c_n de t^n dans $g(y)$ est aussi le coefficient de t^{-1} dans la série de Laurent $g(y(t))/t^{n+1}$, c'est-à-dire le résidu de cette fonction. La série $u(t) = t/\varphi(t)$ est la série réciproque de y , c'est-à-dire $t=u(y)$. D'après la relation (39) de composition des résidus, il vient successivement

$$\begin{aligned} c_n &= \text{Rés} \left[\frac{g(y)}{(u(y))^{n+1}} u'(y) dy \right], \\ &= \text{Rés} \left[\frac{g'(y)}{n(u(y))^n} - \frac{d}{dy} \left(\frac{g(y)}{n(u(y))^n} \right) \right] dy, \\ &= \text{Rés} \frac{g'(y)}{n(u(y))^n} dy, \\ &= \frac{1}{n} \text{Rés} g'(y) \frac{(\varphi(y))^n}{y^n} dy, \\ &= \frac{1}{n} x [y^{n-1}] \left(g'(y) (\varphi(y))^n \right). \end{aligned}$$

□

Preuve combinatoire. (cas $g(y) = y$). Soit L le langage de Lukasiewicz définition 2.17) sur l'alphabet $X = \{x_{-1}, x_0, \dots, x_n, \dots\}$. Notons h le morphisme (de monoïdes) $h: X^* \rightarrow \mathbb{K}[t]$ défini par

$$(40) \quad h(x_{n-1}) = a_n t \quad \text{avec } \varphi(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n.$$

Lemme 4.2 *L'unique solution de l'équation (37) $y = t\varphi(y)$ est donnée par*

$$(41) \quad y = \sum_{w \in L} h(w).$$

Preuve. Soit L_p l'ensemble des mots de L dont la première lettre est x_p (pour $p \geq -1$). Le lecteur démontrera (penser aux chemins de Lukasiewicz!) que tout mot w de L_p se factorise de manière unique sous la forme

$$(42) \quad w = x_p w_1 \dots w_{p+1} \quad \text{avec } w_i \in L \text{ pour } 1 \leq i \leq p+1.$$

D'autre part, $\{L_p, p \geq -1\}$ est une partition de L .

Ces deux propriétés impliquent la relation

$$\sum_{w \in L} h(w) = \sum_{n \geq 0} a_n \left(\sum_{w \in L} h(w) \right)^n,$$

Lemme 4.3 *Tout mot $w \in X^*$ tel que $\delta(w) = -1$ (voir δ définie en 2.17) admet une factorisation et une seule sous la forme*

$$(43) \quad w = uv \quad \text{et} \quad vu \in L.$$

Soit $w = w_1 \dots w_n$ avec $w_i \in X$ pour $1 \leq i \leq n$. Notons $m = \min_{1 \leq i \leq n} (\delta(w_1 \dots w_i))$. Notons j le plus petit entier $1 \leq j \leq n$ tel que $\delta(w_1 \dots w_j) = m$.

Le lecteur démontrera que l'unique factorisation (43) $w = uv$ est définie par $u = w_1 \dots w_j$, $v = w_{j+1} \dots w_n$.

Si on associe un chemin ω au mot w , de manière analogue aux mots de Lukasiewicz (voir figure 21), le facteur u correspond à la première fois pour laquelle le chemin ω atteint son niveau minimum (voir figure 29)

Exemple:

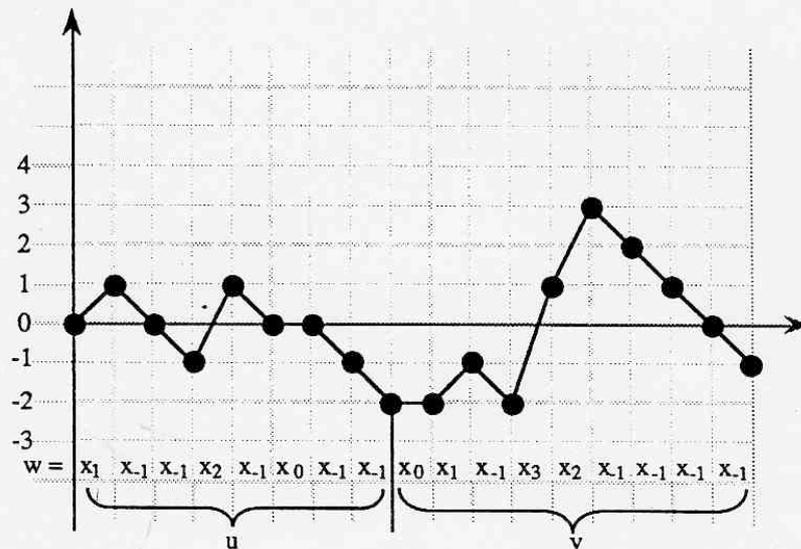


Figure 29. L'unique factorisation (43) $w=uv$.

Fin de la preuve combinatoire. (cas $g(y) = y$)

Notons h_0 le morphisme $h_0: X^* \rightarrow \mathbb{K}$ défini par $h_0(x_{n-1}) = a_n$.

En quelque sorte $h(w) = h_0(w) t^{|w|}$. Le coefficient de t^n dans y est $\sum_{\substack{w \in L \\ |w|=n}} h_0(w)$ d'après

le lemme 3.8.

D'après le lemme 3.9 et le fait que tous les conjugués vu des mots uv de $\delta^{-1}(-1)$ sont distincts, on a la relation

$$n \left(\sum_{\substack{w \in L \\ |w|=n}} h_0(w) \right) = \sum_{\substack{w \in \delta^{-1}(-1) \\ |w|=n}} h_0(w). \quad (44)$$

Il suffit maintenant de remarquer que le membre de droite de l'égalité (41) est égal au coefficient de t^{n-1} dans $(\varphi(t))^n$

Exemples d'applications de la formule d'inversion de Lagrange

Exemple 4.4 Nombres de Catalan.

Soit $y = \sum_{n \geq 1} C_n t^n$ la série génératrice des nombres de Catalan, solution de l'équation $y = 1 + ty^2$.

En posant $y = 1 + z$, il vient

$$z = t \varphi(z) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = (1+t)^2.$$

$$\text{Ainsi} \quad C_n = \frac{1}{n} \times [t^{n-1}] (1+t)^{2n},$$

$$= \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1},$$

$$= \frac{1}{n} \binom{2n}{n}.$$

Exemple 4.5 Cartes planaires pointées.

Nous reprenons les équations (31)

$$\begin{cases} y = t(1-3y)^{-1} \\ z = (1-4y)(1-3y)^{-2} \end{cases}$$

satisfaite, par $z = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$, série génératrice des cartes planaires pointées énumérées selon le nombre d'arêtes. Ces équations s'écrivent aussi

$$(45) \quad \begin{cases} y = t \varphi(y) \\ z = g(y) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{avec } \varphi(t) = \frac{1}{1-3t}, \\ \text{avec } g(t) = \frac{1-4t}{(1-3t)^2}. \end{array}$$

D'après la formule d'inversion de Lagrange (38) il vient

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{n} \times [t^{n-1}] \left(g'(t) (1-3t)^{-n} \right) \\
 &= \frac{2}{n} \times [t^{n-1}] \left((1-6t) (1-3t)^{-n-3} \right) \\
 &= \frac{2}{n} \left([t^{n-1}] (1-3t)^{-n-3} - 6[t^{n-2}] (1-3t)^{-n-3} \right) \\
 &= \frac{2}{n} \left(3^{n-1} \frac{(n+3)(n+4) \dots (2n+1)}{(n-1)!} - 6 \times 3^{n-2} \frac{(n+3)(n+4) \dots (2n)}{(n-2)!} \right) \\
 &= \frac{2}{n} 3^{n-1} \frac{(n+3) \dots (2n)}{(n-2)!} \left[\frac{2n+1}{n-1} - 2 \right] \\
 &= 2 \times 3^n \times \frac{(n+3) \dots (2n)}{n!} \\
 &= 2 \times 3^n \frac{2n!}{(n+2)! n!}
 \end{aligned}$$

§5. Constructions combinatoires et opérations sur les séries ordinaires.

Nous décrivons un cadre général permettant de "relever" les opérations usuelles sur les séries génératrices, au niveau des objets combinatoires.

Définition 5.1 Une *classe d'objets combinatoires valués* est une paire (A, v) dans laquelle A est un ensemble fini ou dénombrable et $v: A \rightarrow \mathbb{K}[x]$ est une fonction, appelée *valuation*, à valeur dans un anneau de polynômes à coefficients dans \mathbb{K} et à variables dans X , et telle que l'on ait la condition suivante:

- (46) Pour tout monôme $w \in \mathbb{K}[x]$, soit A_w l'ensemble des objets $\alpha \in A$ tels que le coefficient de w dans $v(\alpha)$ est $\neq 0$, alors A_w est fini.

Remarque. Les éléments de \mathbb{K} sont considérés comme des monômes de $\mathbb{K}[x]$.

Par abus de langage, nous noterons aussi (A, v) par A . Le polynôme $v(\alpha)$ s'appelle le *poids* ou la *valuation* de l'objet α .

D'après la condition (46) de la définition 5.1, la famille $\{v(\alpha), \alpha \in A\}$ est sommable. La somme

$$f_A = \sum_{\alpha \in A} v(\alpha)$$

s'appelle la série génératrice des objets $\alpha \in A$ valués par v .

Exemple 5.2. Objets de taille n .

Soit (A, v) une classe d'objets combinatoires valués. On suppose que $X = \{t\} \cup Y$ avec $t \notin Y$ et qu'il existe une fonction $w: A \rightarrow \mathbb{K}[Y]$ telle que

- (47) Pour tout $\alpha \in A$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que

$$v(\alpha) = w(\alpha)t^n.$$

On note $n = |\alpha|$. Cet entier s'appelle la *taille* de l'objet α .

Les objets de taille 0 s'appellent *objets vides*. En général, il y a au plus un objet vide. Sa valuation est souvent

$$v(\epsilon) = w(\epsilon) = 1.$$

Nous noterons

$$(48) \quad A_n = \{\alpha \in A, \quad |\alpha| = n\}.$$

La série génératrice f_A peut être considérée comme une série formelle en variable t à coefficients dans $\mathbb{K}[[Y]]$. Lorsque A_n est fini pour tout $n \geq 0$, le coefficient de t^n dans f_A est un polynôme de $\mathbb{K}[Y]$.

Un cas particulièrement important est lorsque $X = \{t\}$, $v(\alpha) = t^{|\alpha|}$. La série $f_A = \sum_{\alpha \in A} t^{|\alpha|}$ est alors la série génératrice ordinaire des nombres $a_n = |A_n|$ (A_n est fini d'après (46)),

$$(49) \quad f_A = \sum_{n \geq 0} |A_n| t^n.$$

Quelques constructions relatives aux objets combinatoires.

On note $A = (A, v_A)$ et $B = (B, v_B)$ deux classes d'objets combinatoires valués.

Définition 5.3. La *somme* des deux classes d'objets combinatoires valués (A, v_A) et (B, v_B) avec $A \cap B = \emptyset$ est la classe (C, v_C) définie par

- C est l'union (disjointe) de A et B
- $v_C: C \rightarrow \mathbb{K}[x]$ est définie par ses restrictions à A et B
pour $\alpha \in A$, $v_C(\alpha) = v_A(\alpha)$, pour $\beta \in B$, $v_C(\beta) = v_B(\beta)$.

La condition (46) de la définition 5.1 est vérifiée.

Définition 5.4. Le *produit* (cartésien) de deux classes d'objets combinatoire valués (A, v_A) et

(B, v_B) est la classe (C, v_C) définie par

- $C = A \times B$ (produit cartésien d'ensemble)
- pour $(\alpha, \beta) \in A \times B$, $v_C(\alpha, \beta) = v_A(\alpha) v_B(\beta)$.

Les conditions (46) de la définition 5.1 est vérifiée. Dans le cas de l'exemple 5.2, on a

$$(50) \quad \text{pour tout } \alpha \in A, \beta \in B, \quad |(\alpha, \beta)| = |\alpha| + |\beta|$$

Proposition 5.5. Soient (A, v_A) et (B, v_B) deux classes d'objets combinatoires valués, des séries génératrices f_A et f_B . Si $A \cap B = \emptyset$, la série génératrice de la somme C des deux classes (définition 5.3) est

$$(51) \quad f_C = f_A + f_B,$$

Dans tous les cas, la série génératrice du produit D des deux classes (définition 5.4) est

$$(52) \quad f_D = f_A f_B.$$

Exemple 5.6 Arbre binaire.

Nous reprenons l'équation (3) donnant la série génératrice des nombres de Catalan. A est l'ensemble des arbres binaires, la valuation et la valuation cardinalité de l'exemple 5.2, $v(\alpha) = t^n$ avec $n = |\alpha|$ (nombre de sommets de l'arbre). L'équation (3) $f(t) = 1 + t f^2(t)$ est obtenue en appliquant la proposition 5.5 pour la somme ($A = A_0 + B$, avec B classe des arbres binaires de non vide) et le produit (B est le produit cartésien des classes valuées $A \times A_1 \times A$).

Il en irait de même pour les équations algébriques (9) (nombres de Strahler), (11) (mots de Dyck), (16) (mots de Motzkin), (19) (mots de Motzkin colorés), (23) (mots de Lukasiewicz), exercice 2.12 (mots du grand Dyck), (26) (facteurs gauches de mots de Motzkin).

Définition 5.7 Soit (A, v_A) une classe d'objets valués. On appelle *séquence d'objets de A*, la classe (C, v_C) définie par

$$(C, v_C) = (\epsilon) + (A, v_A) + \dots + (A, v_A)^n + \dots$$

et notée aussi $(A, v_A)^*$. [La somme signifie la somme des classes $C_n = (A, v_A)^n$, la définition 5.3 se généralisant aisément aux sommes infinies. Le produit C_n est le produit de la définition 5.4 de (A, v_A) n fois avec lui-même]

Là encore les axiomes (i) et (ii) de la définition 5.1 sont vérifiées.

Proposition 5.8 Soit (A, v_A) une classe d'objets valués de série génératrice f_A . La série génératrice f_{A^*} de la classe $(A, v_A)^*$ séquence d'objets de A (définition 5.7) est donnée par

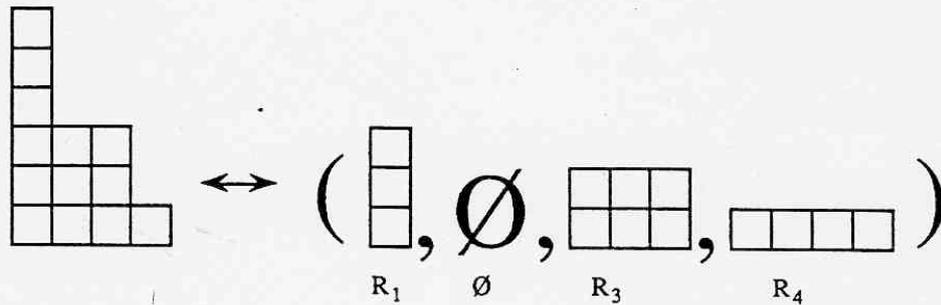
$$(53) \quad f_{A^*} = \frac{1}{1-f_A}.$$

Exemple 5.9 Série génératrice des diagrammes de Ferrers. (exercices 6.2)

Notons \mathcal{F} la classe des diagrammes de Ferrers munie de la valuation cardinalité $v(\alpha) = t^{|\alpha|}$ ($|\alpha|$ nombre de cases). Soit \mathcal{F}_m les diagrammes ayant au plus m colonnes. Soit \mathcal{R}_i la classe des rectangles ayant i colonnes.

La classe \mathcal{F}_m est "isomorphe" au produit cartésien (définition 5.4) des classes $\mathcal{R}_1 \times \dots \times \mathcal{R}_m$. En effet tout diagramme $F \in \mathcal{F}_m$ est en bijection avec un m-uplet de rectangles $(\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_m)$ de largeur respective 1, 2, ..., m (les rectangles peuvent éventuellement être vides).

Exemple:



D'autre part, la classe \mathfrak{R}_i des rectangles de largeur i est "isomorphe" à la classe séquence (définition 5.7 de la ligne à i cases. Cette dernière classe, que nous notons \mathfrak{S}_i , n'a qu'un seul objet, de cardinalité i , et sa série génératrice est

$$f_{\mathfrak{S}_i} = q^i$$

(on prend q au lieu de t comme variable).

D'après la proposition 5.8, la série génératrice de la classe \mathfrak{R}_i est

$$f_{\mathfrak{R}_i} = \frac{1}{1-q_i},$$

et donc, d'après la proposition 5.4, on retrouve bien la solution de l'exercice 6.2 b), à savoir

$$f_{\mathfrak{S}_m} = \prod_{i=1}^m \frac{1}{1-q_i},$$

On déduit la classique série génératrice $f_{\mathfrak{S}} = \prod_{i \geq 1} 1/(1-q_i)$, soit en passant à la limite, soit en généralisant la définition 5.4 et la proposition 5.5 au cas des produits infinis.

Définition 5.10. Soient A et B deux classes d'objets valués. On suppose que la valuation v_A est du type (47) $v_A(\alpha) = w_A(\alpha) t^{|\alpha|}$. La classe composée $C = A[B]$ de A par B est définie par

$$- C = \sum_{n \geq 0} A_n x B^n \text{ (somme et produit des définitions 5.3 et 5.4, } A_n \text{ définie en (48)).}$$

$$- \text{ pour } w = (\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n) \in Ax B^n, \\ v_C(w) = w_A(\alpha) v_B(\beta_1) \dots v_B(\beta_n).$$

La condition (46) de la définition 5.1 est satisfaite.

Proposition 5.11. Soit $C = [A[B]]$ la classe composée de A par B (définition 5.10). La série génératrice de C est donnée par

$$(54) \quad f_C = f_A(f_B),$$

en considérant la série $f_A(t)$ comme une série en t à coefficients dans $\mathbb{K}[[Y]]$.

Exemple 5.12 Nombres de Strahler.

Nous reprenons le paramètre "nombre de Strahler" d'un arbre binaire défini à l'exercice 1.13. La série génératrice double

$$(55) \quad R(t,x) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ p \geq 0}} R_{n,p} x^p t^n$$

vérifie l'équation fonctionnelle suivante

$$(56) \quad R(t,x) = 1 + x \frac{t}{1-2t} R \left[\left(\frac{t}{1-2t} \right)^2, x \right].$$

Cette équation se déduit des propositions précédentes de la façon suivante.

Lemme 5.13 Soit B un arbre binaire complet ayant pour nombre de Strahler $p \geq 1$. Soit $\varepsilon^{-1}(B) = B'$ l'arbre binaire obtenu à partir de B en "enlevant" les feuilles (voir fig.5). Soit B'' l'arbre obtenu à partir de B' en "enlevant" les points simples. Alors le nombre de Strahler de $B'' = \varphi(B)$ est $p-1$.

Exemple:

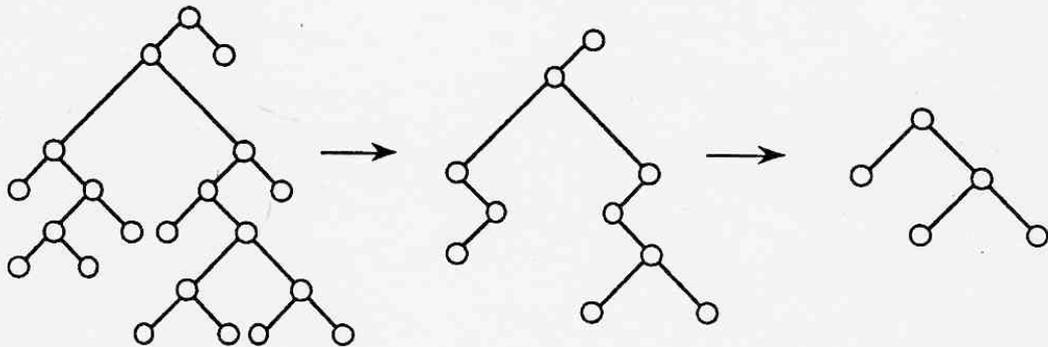


Figure 30.

D'autre part $t/(1-2t)$ est la série génératrice des arbres binaires non vides sans points doubles, c'est-à-dire ceux ayant la forme "zig-zag" suivante:



Le lecteur prouvera maintenant la relation (56) en utilisant les deux idées suivantes: le passage de $R(t,x)$ à $1+xt R(t^2, x)$ correspond à la bijection ε . Ensuite la substitution $t \rightarrow t/(1-2t)$ correspond à "remplacer" chaque sommet de $\varepsilon(B)$ un "arbre zig-zag".

Définition 5.13. Soit (A, v_A) une classe d'objets valués avec une valuation du type (47): $v_A(\alpha) = w_A(\alpha) t^{|\alpha|}$. La classe d'objets pointés $C = A^\bullet$ est définie par

$$- C = \sum_{n \geq 0} A_n \times [1, n] \quad (\text{union disjointe})$$

- pour $\omega = (\alpha, i)$ avec $1 \leq i \leq |\alpha|$, alors

$$v_C(\omega) = v_A(\alpha).$$

La condition (46) de la définition 5.1 est vérifiée.

Proposition 5.14. La série génératrice f_{A^\bullet} de la classe d'objets pointés de A (définition 5.13) est donnée par

$$(55) \quad f_{A^\bullet} = t \frac{\delta}{\delta t} f_A .$$