

CHAPITRE III

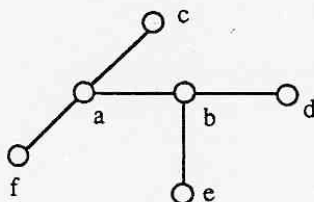
SERIES GENERATRICES EXPONENTIELLES

§ 1. Espèces et structures.

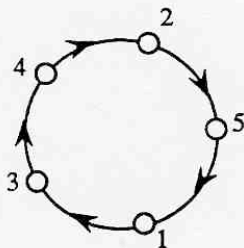
Définition "naïve". Une *structure* (combinatoire) sur l'ensemble fini U est une "*construction*" finie faite sur cet ensemble.

On dira que U est l'ensemble *sous-jacent* à la structure α , ou que U est *muni* de la structure α , ou que α est *construite* sur U , ou encore que α est *portée par* U .

Exemples. Un *arbre* (on graphe sans cycle) sur $E = \{a, b, c, d, e, f\}$



Un *cycle* sur $E = \{1, 2, \dots, 5\}$

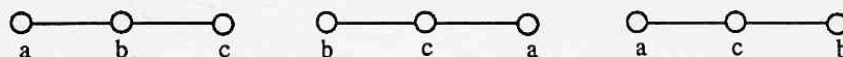


Permutations, *graphes*, *partitions*, *endofonctions* sont d'autres structures (combinatoires) sur un ensemble U fini.

On classifie les structures en *espèces de structures* : espèce des arbres, des cycles, des permutations, graphes, partitions, endofonctions, ...

Une *espèce* F sera définie par l'ensemble fini $F[U]$ de toutes les structures possibles portée par U et du "type" F , (appelée, aussi *F-structure*).

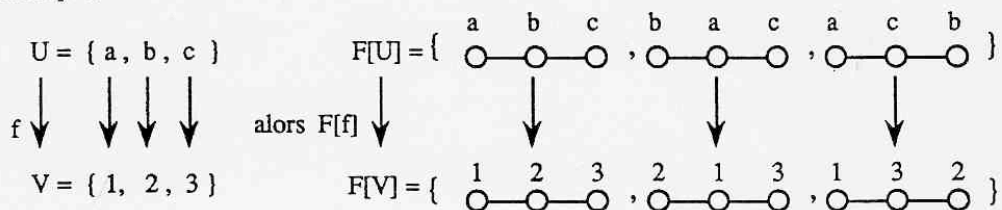
Par exemple, si A est l'espèce des arbres, pour $U = \{a, b, c\}$, $A[U]$ a 3 éléments:



Ce sont les trois A -structures possibles sur $U = \{a, b, c\}$.

Intuitivement, les notions de structures sur U et d'espèces de structures doivent pouvoir se "transporter" d'un ensemble U à un autre V . De manière plus précise, si l'on a une bijection $U \rightarrow V$, on doit pouvoir définir une autre bijection $F[U] \rightarrow F[V]$ permettant de "transporter le long de f " les F -structures sur U vers les F -structures sur V .

exemple:



De plus, ce transport doit être cohérent, c'est-à-dire $F[f \circ g] = F[f] \circ F[g]$ et $F[\text{Id}_U] = \text{Id}_{F[U]}$ (on désigne par Id l'application identité $X \rightarrow X$).

On arrive ainsi à la définition abstraite et rigoureuse de la notion d'*espèce*. Cette définition s'exprime en termes de *catégories*.

Soit \mathbb{E} la catégorie dont les objets sont les ensembles finis et dont les flèches $U \rightarrow V$ sont les bijections.

Définition 1.1. Une *espèce* F est un *foncteur* $F: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$.

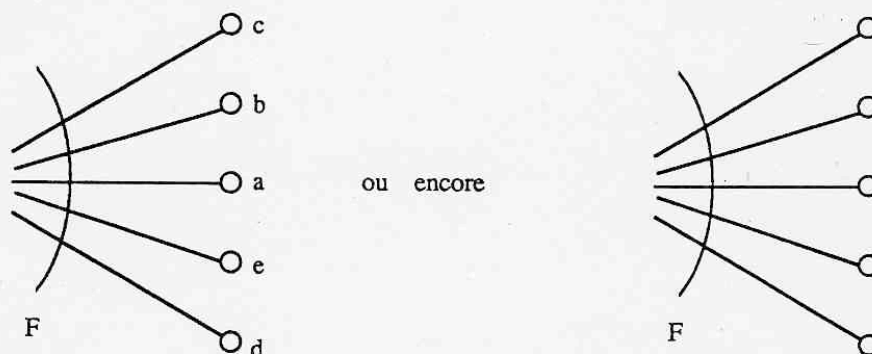
En d'autres termes, c'est une "règle" qui permet d'associer

- à chaque ensemble fini U un autre ensemble $F[U]$ (dont les éléments s'appellent les *F-structures* sur U)
- à chaque bijection $U \rightarrow V$, une autre bijection $F[U] \rightarrow F[V]$ (appelée *F-transport* le long de f), de telle façon que l'on ait les deux conditions suivantes (*cohérence des F-transports*)

(i) $F[f \circ g] = F[f] \circ F[g]$

(ii) $F[\text{Id}_U] = \text{Id}_{F[U]}$.

Convention. Une *F-structure* sur U sera schématisée par une figure du type suivant



Dénombrement. D'après la cohérence des *F-transports*, le nombre de *F-structures* sur U ne dépend que du nombre d'éléments de U .

Soit donc

$$(1) \quad a_n = |F[\{1, \dots, n\}]|$$

Définition 1.2. La *série génératrice* (notée $F(t)$) de l'espèce F est la série génératrice exponentielle des nombres a_n , c'est-à-dire

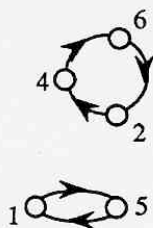
$$(2) \quad F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}.$$

Exemples.

1. *Permutations* S .

$$a_n = n!, \quad S(t) = \frac{1}{1-t}.$$

exemple:



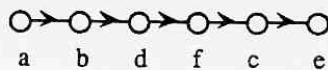
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

la permutation σ notée sous forme de cycles.

2. *Ordre total* L .

$$a_n = n!, \quad L(t) = \frac{1}{1-t}.$$

exemple:



les deux espèces S et L ont même séries génératrice, mais ne sont pas "*isomorphes*" (au sens de la

théorie des catégories).

3. *Involution* I (ou Inv) .

$$I(t) = \exp\left(t + \frac{t^2}{2}\right) \text{ (voir ci-dessous) .}$$

permutations σ telles que $\sigma^2 = \text{Id}$, c'est-à-dire les permutations n'ayant que des cycles de longueur 1 (points fixes) ou de longueur 2.

4. *Involution sans points fixes* J.

$$J(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) .$$

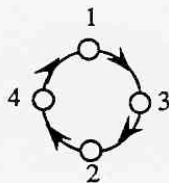
5. *Dérangements* D, c'est-à-dire les permutations n'ayant pas de points fixes.

$$D(t) = \frac{e^{-t}}{1-t} \text{ (voir ci-dessous)}$$

6. *Cycles* (orientés) C, c'est-à-dire les permutations circulaires

$$a_n = (n-1)! , c(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n} = \log(1-t)^{-1} .$$

exemple:



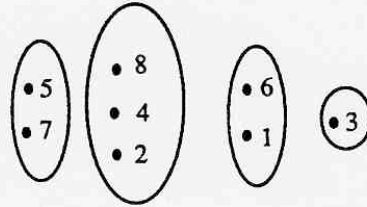
7. *Endofonction* End, End [U] est l'ensemble des fonctions $U \rightarrow U$.

$$a_n = n^n , \text{End}(t) = \sum_{n \geq 0} n^n \frac{t^n}{n!}$$

8. *Partition* B.

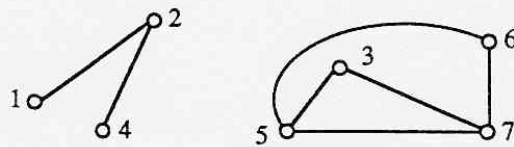
$a_n = B_n$ appelé nombre de Bell. $B(t) = \exp(e^t - 1)$ (voir ci-dessous).

exemple:

9. *Graphe* G.

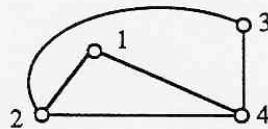
$$a_n = 2^{\binom{n}{2}}$$

exemple:



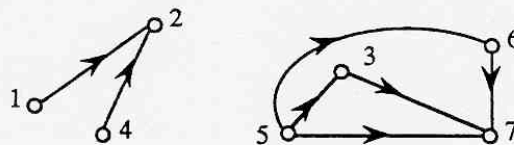
Graphe connexe G_c .

exemple:

10. *Graphe orienté* (avec boucles possibles)

$$a_n = 2^{n^2}$$

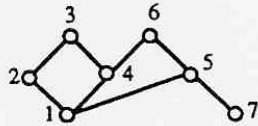
exemple:



11. Ensemble partiellement ordonné

 $a_n = ?$ (problème ouvert)

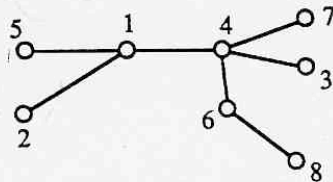
exemple:



Défini par son "diagramme de Hasse" :

 $1 < 2 < 3, 1 < 4 < 6, 7 < 5 < 6, 1 < 5, 4 < 3$.12. Arbre (de Cayley) \mathcal{Q}_n , c'est-à-dire les graphes sans cycles.

exemple:



On verra que

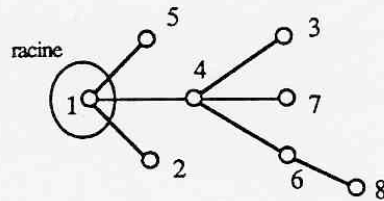
$$a_n = n^{n-2}$$

(formule de Cayley)

[Ne pas confondre ces arbres avec les arbres planaires introduits au chapitre II].

13. Arborescence \mathcal{A}_n , c'est-à-dire les arbres avec un sommet *pointé* (ou distingué) (appelé *racine*).

exemple:



$$a_n = n^{n-1}$$

14. Arbre binaire (étiqueté) $a_n = n! C_n$

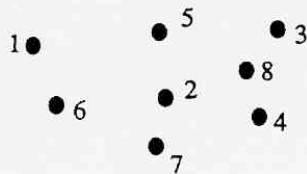
(voir définition 1.1, ch. II)

15. *Arbre planaire* (étiqueté) $a_n = (n-1)! C_{n-1}$
Forêts d'arbres planaires (étiquetés) $a_n = n! C_n$
 (voir définitions 1.14, 1.17, ch. II)

Remarque. Les arbres binaires, arbres planaires et forêt d'arbres planaires introduits au chapitre II par les définitions 1.4, 1.15, 1.17, (et dénombrés par les nombres de Catalan C_n) ne sont pas des espèces de structures.

16. *Ensemble* E , appelée aussi *l'espèce uniforme*.

exemple:



En somme, on ne met aucune structure sur l'ensemble U .

$$E[U] = \{U\}, \quad a_n = 1, \quad E(t) = e^t.$$

17. *Ensemble pair* EP ,

Si $|U|$ pair $EP[U] = \{U\}$.

Si $|U|$ impair $EP[U] = \emptyset$.

Ainsi,

$$a_{2n} = 1, \quad a_{2n+1} = 0, \quad \text{et} \quad EP(t) = \cosh t.$$

De manière analogue, *Ensemble impair* EI ,

$$EI(t) = \sinh t.$$

18. *Sous-ensemble* (ou *partie*) P.

P [U] est l'ensemble des parties de U.

$$a_n = 2^n, \quad P(t) = \exp(2t).$$

19. *Singleton*, notée T ou X.

$$\begin{aligned} T[U] &= \emptyset \text{ si } |U| \neq 1 \\ &= \{U\} \text{ si } |U| = 1. \end{aligned}$$

$$a_n = \delta_{n,1} \text{ (symbole de Kronecker), } T(t) = t.$$

Espèce de l'ensemble vide 1.

$$\begin{aligned} \mathbf{1}[U] &= \emptyset \text{ si } |U| \neq 0, \\ &= \{\emptyset\} \text{ si } U = \emptyset. \end{aligned}$$

$$a_n = \delta_{n,0}, \quad \mathbf{1}(t) = 1.$$

Espèce vide 0.

$$\mathbf{0}[U] = \emptyset.$$

$$a_n = 0, \quad \mathbf{0}(t) = 0.$$

20. *n-uplet* $T^n/n!$.

$$\begin{aligned} E[U] &= \emptyset \text{ si } |U| \neq n, \\ &= \{U\} \text{ si } |U| = n. \end{aligned}$$

$$\frac{T^n}{n!}(t) = \frac{t^n}{n!}$$

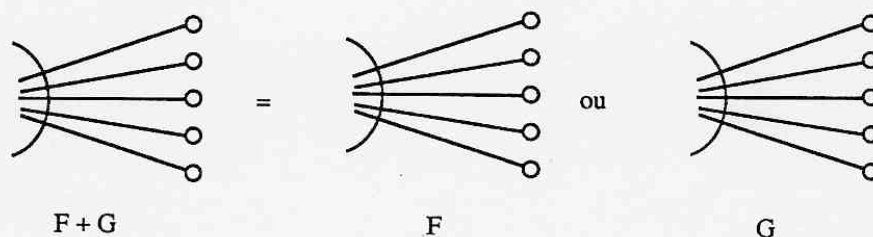
§2. Opérations sur les espèces.

Nous allons définir des opérations sur les espèces (somme, produit, substitution, dérivée) correspondant aux opérations usuelles sur les séries formelles.

Définition 2.1. La *somme* de deux espèces F et G est définie par

$$(3) \quad (F + G)[U] = F[U] + G[U]. \text{ (union disjointe)}$$

schématiquement:



Remarque 2.2. Remarquons que la définition 2.1 est incomplète. En toute rigueur, il faudrait aussi définir le transport de structures $(F + G)[f]$ pour $f: U \rightarrow V$. Le lecteur le définirait aisément. Nous omettrons également de le faire dans les définitions ci-dessous de produit, substitution, dérivée et espèce pointée.

Proposition 2.3. La série génératrice $(F + G)(t)$ de la somme de deux espèces F et G est

$$(4) \quad (F + G)(t) = F(t) + G(t).$$

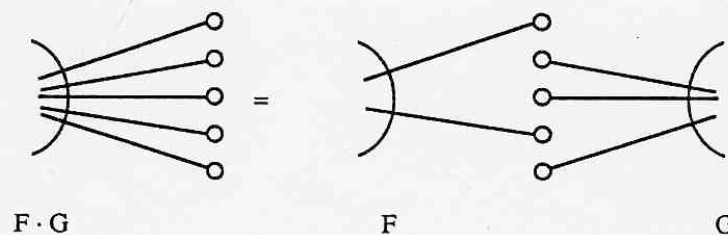
En effet si $F(t) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$, $G(t) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{t^n}{n!}$ et $(F+G)(t) = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{t^n}{n!}$,

alors d'après (3) on a $c_n = a_n + b_n$ pour tout $n \geq 0$.

exemple 2.4. L'espèce "ensemble" E est la somme $EI + EP$ des espèces "ensemble pair" et "ensemble impair".

Ainsi $e^t = \text{cht} + \text{sht}$.

Définition 2.5. Le produit $F \cdot G$ des deux espèces F et G est défini schématiquement par le dessin



En d'autres termes, une structure d'espèce $F \cdot G$ sur l'ensemble U est un quadruplet

$\gamma = (U_1, U_2, \alpha, \beta)$ avec $\{U_1, U_2\}$, partition de U et $\alpha \in F[U_1]$, $\beta \in G[U_2]$.

Proposition 2.6. La série génératrice $(F \cdot G)(t)$ du produit de deux espèces F et G est

$$(5) \quad (F \cdot G)(t) = F(t) G(t)$$

En effet, si l'on note $F(t) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$, $G(t) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{t^n}{n!}$ et $(F \cdot G)(t) = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{t^n}{n!}$, alors

$$(6) \quad c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

L'égalité (6) est équivalente à (5).

Exemple 2.7. Dérangements.

Notons (voir le §1) S l'espèce des *permutations*, D l'espèce des *dérangements* (permutations sans points fixes) et E l'espèce *uniforme*.

On cherche à calculer le nombre d_n de dérangements sur $\{1, \dots, n\}$.

On a l'égalité entre espèces (voir figure 1)

$$(7) \quad S = D \cdot E.$$

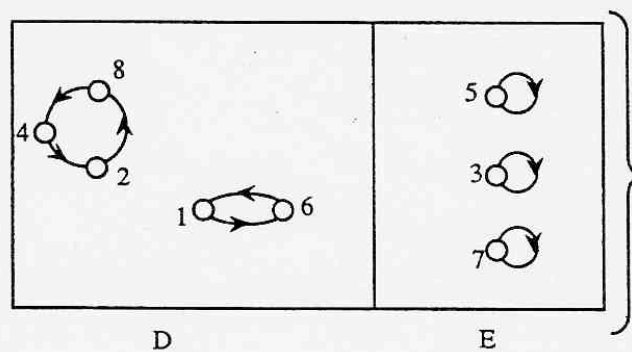


Figure 1. L'égalité (7).

D'après la proposition 2.6, on déduit de (7) l'égalité des séries génératrices

$$(8) \quad \frac{1}{1-t} = \left(\sum_{n \geq 0} d_n \frac{t^n}{n!} \right) \cdot e^t$$

d'où $D(t) = \frac{e^{-t}}{1-t}$, et le résultat classique

$$(9) \quad d_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

Le membre de droite est le plus proche entier de $n!e^{-1}$. La probabilité d'avoir un dérangement lorsque l'on prend une permutation aléatoire σ parmi les $n!$ permutations possibles est

$p_n = \frac{d_n}{n!}$. Cette probabilité tend vers $\frac{1}{e}$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

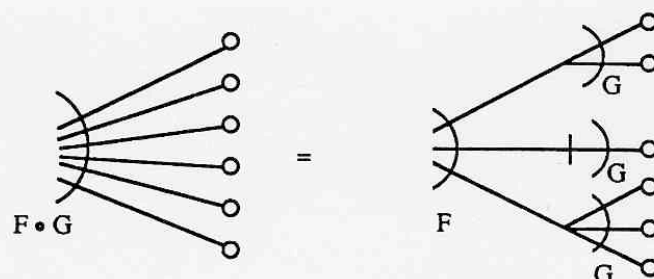
exercice 2.8. Démontrer les récurrences suivantes

$$(10) \quad d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1}),$$

$$(11) \quad d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}$$

On donnera aussi des preuves bijectives de (10) et (difficile) de (11).

Définition 2.9. Soient F et G deux espèces avec $G[\emptyset] = \emptyset$. La *substitution* de l'espèce G dans l'espèce F , notée $F(G)$ ou $F \circ G$ est définie schématiquement par le dessin



c'est-à-dire qu'une $F(G)$ -structure sur l'ensemble U est la donnée:

- d'une partition $\{U_1, \dots, U_k\}$ de U en classes non vides,
- d'une G -structure x_i sur chaque classe U_i , $1 \leq i \leq k$.
- d'une F -structure sur l'ensemble quotient (pour la relation d'équivalence sur U dont les classes sont les U_i , $1 \leq i \leq k$).

On dit aussi qu'une $F(G)$ -structure est une F -assemblée de G -structures.

Définition 2.10. Une *assemblée de G -structures* est une F -assemblée de G -structures avec $F = E$, l'espèce uniforme.

Par exemple une permutation est une assemblée de cycles.

Proposition 2.11 Soient F et G deux espèces avec $G[\emptyset] = \emptyset$. La série génératrice de l'espèce $F \circ G$ (définition 2.9) est égale à

$$(12) \quad (F \circ G)(t) = F(G(t)).$$

Notons $F(t) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$, $G(t) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{t^n}{n!}$ et $(F \circ G)(t) = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{t^n}{n!}$.

L'égalité (12) est équivalente à l'égalité

$$(13) \quad c_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ n_1 + \dots + n_k = n \\ n_1, \dots, n_k \geq 1}} \frac{n!}{k! n_1! \dots n_k!} a_k b_{n_1} \dots b_{n_k}.$$

Le nombre de choix d'une partition de U en k partie $\{U_1, \dots, U_k\}$ de taille respective n_1, \dots, n_k est $\frac{1}{k!} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$. ($n = |U|$). Le produit $a_k b_{n_1} \dots b_{n_k}$ est le nombre de choix de la G -structure et des F -structures définissant une $(F \circ G)$ -structure sur l'ensemble U . D'où la formule (13) et donc (12).

Cas particulier: assemblée de G -structures.

Lorsque F est l'espèce uniforme E , alors:

Corollaire 2.12. *La série génératrice de l'espèce des assemblées de G -structures est égale à:*

$$(14) \quad (E \circ G)(t) = \exp(G(t)).$$

Notations L'espèce $E \circ G$ se note aussi E^G .

Exemples 2.13.

-*Permutations* $S = E \circ C$ (assemblée de cycles)

On a bien $\log(1-t)^{-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n}$.

-*Partitions* $B = E \circ E^*$ (assemblée de blocs non vides).

E^* désigne l'espèce des ensembles non vides, donc $B(t) = \exp(e^t - 1)$.

-*Graphes* $G = E \circ G_C$ (assemblée de graphes connexes).

Exemple 2.14. Permutations dont les cycles sont d'un type donné.

Soit \mathcal{C} une espèce dont les \mathcal{C} -structures sur U sont des cycles sur U , c'est-à-dire $\mathcal{C}[U] \subseteq C[U]$. Soit $S_{\mathcal{C}}$ l'espèce des permutations dont les cycles sont des \mathcal{C} -structures. D'après le corollaire 2.12, on a l'égalité des séries génératrices

$$(14) \quad S_{\mathcal{C}}(t) = \exp(\mathcal{C}(t)).$$

Par exemple, si \mathcal{C} est l'espèce des cycles dont les longueurs appartiennent à un ensemble $I \subseteq \mathbb{N}$ donné, alors l'espèce des permutations a pour série génératrice

$$(15) \quad S_I(t) = \exp\left(\sum_{i \in I} \frac{t^i}{i}\right).$$

En particulier, la série génératrice des involutions est

$$(16) \quad \text{Inv}(t) = \exp\left(t + \frac{t^2}{2}\right).$$

La série génératrice des involutions sans points fixes est

$$(17) \quad J(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

La série génératrice des permutations n'ayant que des cycles de longueur paire est

$$(18) \quad \text{SP}(t) = \exp\left(\sum_{n \geq 1} \frac{t^{2n}}{2n}\right)$$

$$\text{SP}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

On déduit de (18) que le nombre de telles permutations sur $2n$ éléments est

$$a_{2n} = 1^2 \cdot 3^2 \cdots (2n-1)^2.$$

Exercice. Démontrer bijectivement cette dernière égalité. (difficile)

Exemple 2.15. Endofonctions.

$$(19) \quad \text{End} \simeq S \circ A$$

Une endofonction peut être considérée comme une S -assemblée (S est l'espèce permutation)

d'arborescences (voir § 1).

Une endofonction $f: U \rightarrow U$ est définie par son graphe. Une arête joint le sommet i au sommet j ($i \rightarrow j$), si $j = f(i)$. (voir figure 2).

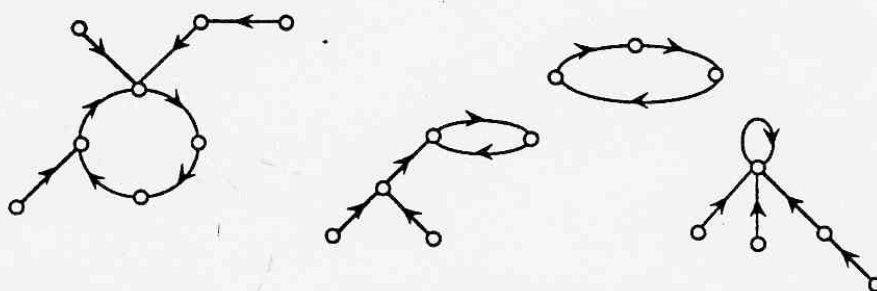


Figure 2. Une endofonction.

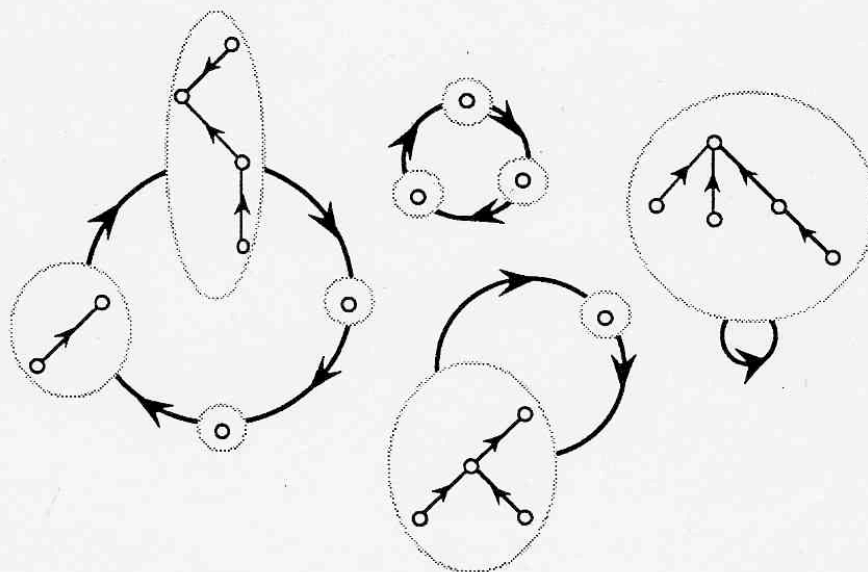


Figure 3.

Une endofonction considérée comme une S-assemblée d'arborescences.

Définition 2.16. Soit t une espèce. L'espèce pointée F^\bullet est définie schématiquement par



En d'autres termes une structure d'espèce F^\bullet sur l'ensemble U est une paire (α, x) avec $\alpha \in F[U]$ et $x \in U$.

Proposition 2.17. La série génératrice de l'espèce pointée F^\bullet est égale à

$$(20) \quad F^\bullet(t) = t \frac{d}{dt} F(t).$$

Exemple 2.18. Arborescences.

L'espèce A des arborescences est l'espèce pointée des arbres, c'est-à-dire

$$(21) \quad A = \mathcal{A}^\bullet.$$

Remarquons que l'on peut aussi écrire

$$(22) \quad A = T \cdot (E \circ A),$$

avec T l'espèce "singleton" et $E \circ A$ l'espèce "assemblée d'arborescences". L'égalité (21) correspond à la figure 4.

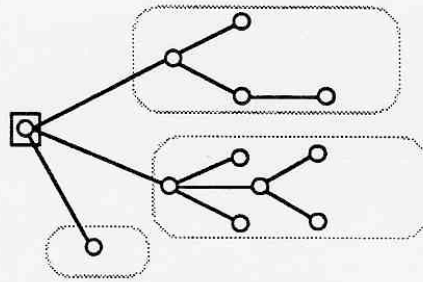


Figure 4. La relation $A = T \cdot (E \circ A)$.

Notons $y = A(t)$. L'égalité (21) implique l'égalité

$$(23) \quad y = t \exp(y).$$

Soit a_n (resp. b_n) le nombre d'arbres (resp. arborescences) sur un ensemble à n éléments. En appliquant la formule d'inversion de Lagrange à l'équation (23) (voir ch. II, proposition 4.1), il vient

$$(24) \quad \begin{aligned} \frac{b_n}{n!} &= \frac{1}{n} \times [t^{n-1}] (e^{nt}), \\ &= \frac{1}{n} \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}, \\ b_n &= n^{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (21), le nombre a_n d'arbres (de Cayley) sur n éléments est

$$(25) \quad a_n = n^{n-2}.$$

Exemples 2.19. Vertébrés (preuve combinatoire de la formule (25)).

Un *vertébré* est une arborescence pointée, c'est-à-dire un arbre doublement pointé. Notons V l'espèce des vertébrés. On a

$$(26) \quad V = A^* (= (d^*)^*).$$

On a aussi

$$(27) \quad V = L \circ A \quad (L \text{ espèce des ordres totaux}).$$

En effet, dans un vertébré, il y a deux sommets distingués, que l'on pourrait appeler la tête et la queue. Il existe un unique chemin allant de la queue à la tête, appelé la *colonne vertébrale*. (Remarquons que ce chemin est vide lorsque la tête et la queue sont le même sommet).

Un vertébré peut être considéré comme obtenu en substituant chaque sommet de la colonne vertébrale par une arborescence (voir figure 5).

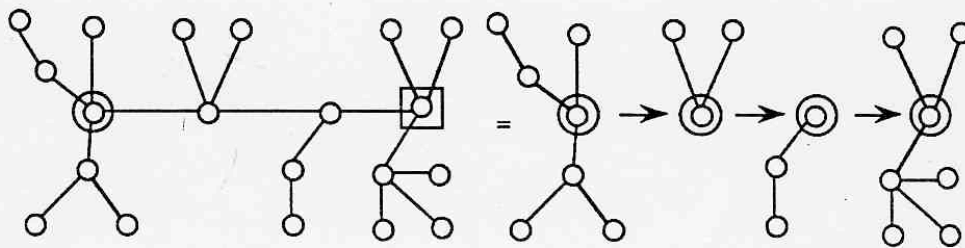


Figure 5. Preuve de (27) $V = L \circ A$, (vertébrés).

En appliquant la proposition 2.11, il vient

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{1 - A(t)}, \\ &= S \circ A(t), \quad (S \text{ espèce des permutations}) \text{ et} \end{aligned}$$

$$(28) \quad V(t) = \text{End}(t),$$

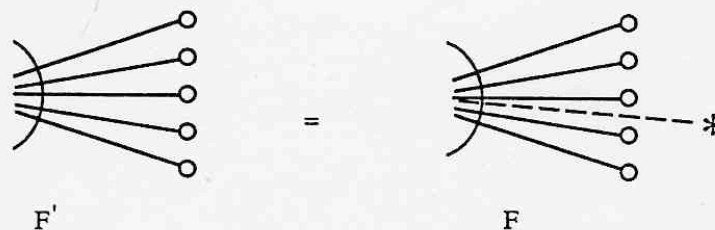
(d'après la relation (19) sur l'espèce des endofonctions). Ainsi, le nombre c_n de vertébrés sur n éléments est:

$$(29) \quad c_n = n^n.$$

On en déduit (24) et (25). Remarquons que les espèces vertébrés V et endofonctions End ont mêmes séries génératrices sans être "isomorphes" (au sens de l'isomorphisme des foncteurs en théorie des catégories). Une preuve bijective de (29) nécessiterait d'explicitier une bijection entre les permutations et les ordre totaux.

Définition 2.20. Soit F une espèce.

L'espèce dérivée F' est définie schématiquement par



En quelque sorte, une F' -structure sur U est une F -structure sur $U + \{*\}$, ensemble obtenu à partir de U par adjonction d'un élément supplémentaire noté $*$.

Proposition 2.21. La série génératrice de l'espèce dérivée est

$$(30) \quad (F') (t) = \frac{d}{dt} F(t).$$

Soient F et G deux espèces.

Proposition 2.22. *On a les relations suivantes*

(identités combinatoires au niveau des espèces):

$$(31) \quad F^\bullet = T \cdot F'$$

$$(32) \quad (F + G)' = F' + G'$$

$$(33) \quad (F \cdot G)' = (F' \cdot G) + (F \cdot G')$$

$$(34) \quad (F(G))' = F'(G) \cdot G'$$

Par exemple, donnons une preuve de (34) de manière schématique (voir figure 6).

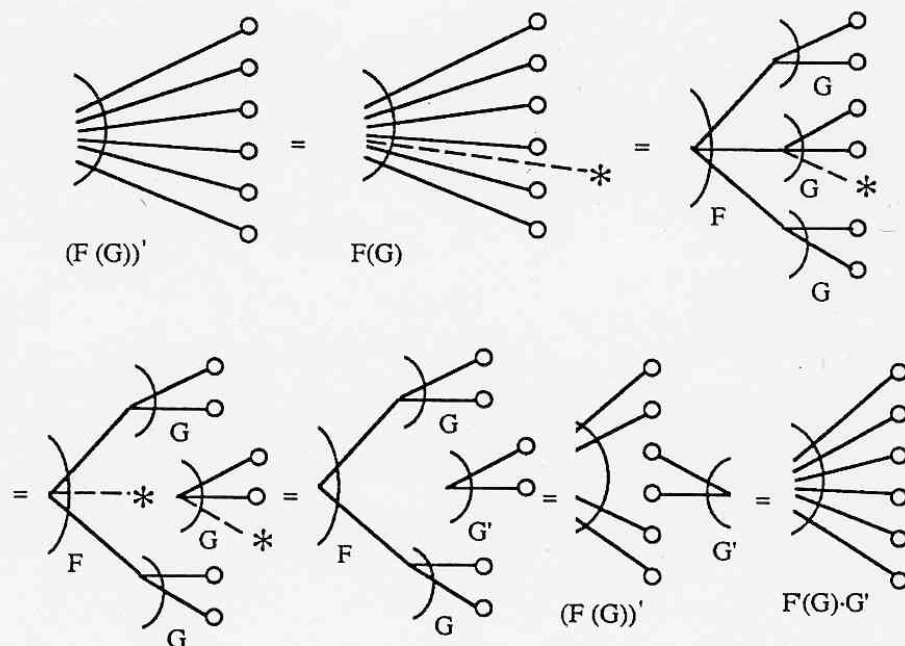


Figure 6. Preuve combinatoire de (34), $(F(G))' = F'(G) \cdot G'$.

Exemple 2.23. Soit L l'espèce des ordres totaux, alors on a

$$(35) \quad L' = L^2, \text{ car}$$

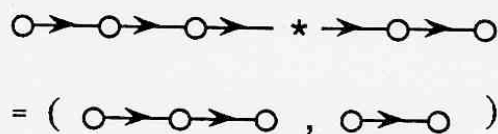


Figure 7. La relation $L' = L^2$.

On retrouve bien l'égalité

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-t} \right) = \left(\frac{1}{1-t} \right)^2.$$

Exemple 2.24. Soit C l'espèce des cycles. Alors

$$(36) \quad C' = L.$$

En effet, schématiquement,

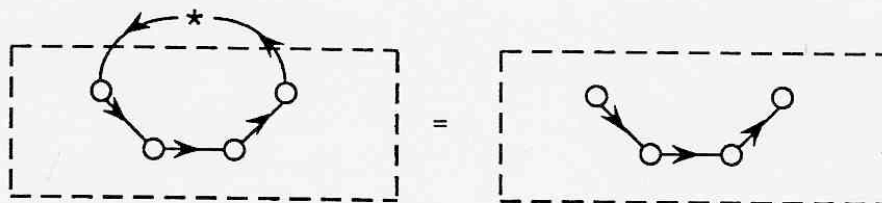


Figure 8. La relation $C' = L$.

Avec $C(0) = 0$, on en déduit

$$C(t) = \int_0^t L(u) du, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\log(1-t)^{-1} = \int_0^t \frac{du}{1-u} \quad (\text{bien connu!}).$$

Exemple 2.25. Soit B l'espèce des partitions, alors

$$(37) \quad B' = E \cdot B,$$

schématiquement :

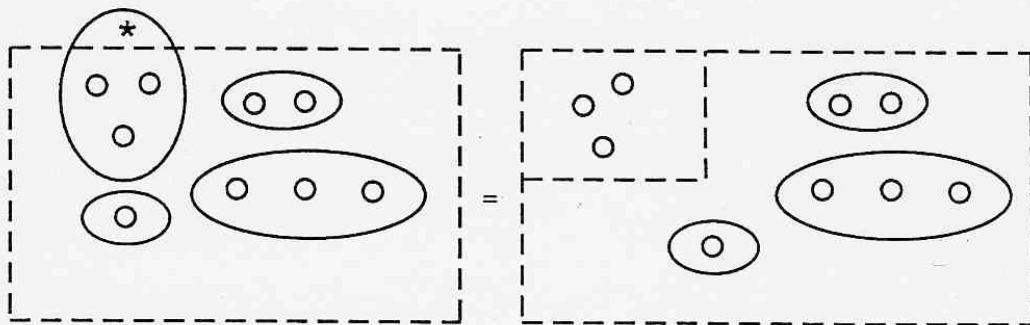


Figure 9. La relation $B' = E \cdot B$.

On en déduit la récurrence suivante sur les nombres de Bell B_n (nombre de partitions d'un ensemble ayant n éléments)

$$(38) \quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

Exemple 2.26. Soit l'espèce des assemblée d'arborescences , (voir aussi l'exemple 2.18).

Rappelons que \mathcal{Q} désigne l'espèce des arbres. On a alors la relation

$$(39) \quad \mathcal{Q}' = \mathcal{F}.$$

Schématiquement, ceci provient de

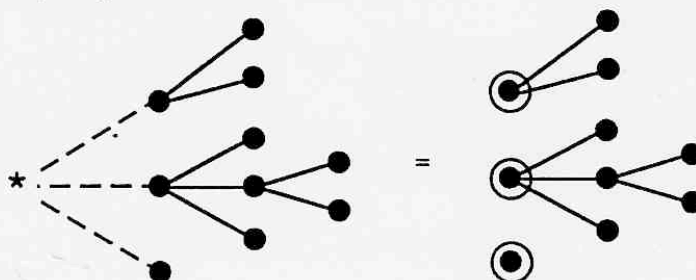


Figure 10. Preuve de (39), $\mathcal{Q}' = \mathcal{F}$.

Exemple 2.27. Primitive de l'espèce des graphes.

L'espèce G des graphes possède une espèce "primitive", c'est-à-dire une espèce H telle que $G = H'$. En effet, soit H l'espèce des graphes tels que le degré de chaque sommet soit pair (nombre d'arêtes incidentes à ce sommet). Alors on a

$$(40) \quad H' = G.$$

La preuve est schématisée sur la figure suivante:

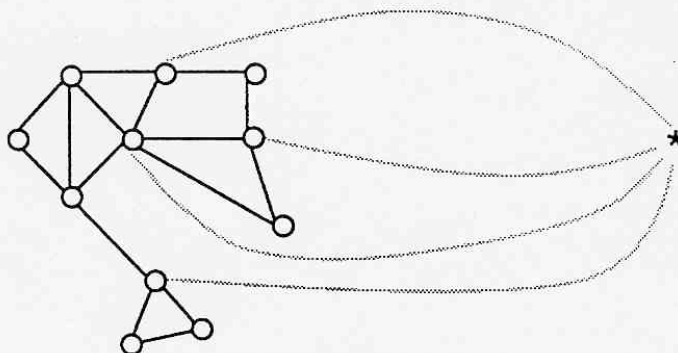


Figure 11. $H' = G$.

§3. Espèces linéaires.

Rappelons que \mathbb{E} désigne la catégorie des ensembles et bijections.

Notons \mathbb{L} la catégorie dont les objets sont les *ensembles totalement ordonnés* et dont les flèches sont les *bijections croissantes*.

Définition 3.1. Une *espèce linéaire* (ou \mathbb{L} -espèce) est un foncteur $M: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{E}$.

En d'autres termes, M est une "règle" permettant d'associer à chaque ensemble totalement ordonné U un ensemble fini $M[U]$ (ensemble des M -structures sur U) et à chaque bijection croissante $U \xrightarrow{f} V$ une bijection $M[U] \xrightarrow{M[f]} M[V]$ (appelée F -transport le long de f), de telle façon qu'il y ait cohérence des F -transports (conditions (i), (ii) de la définition 1.1).

On pourra toujours, supposer que $U = [1, n]$ est totalement ordonné par la relation d'ordre usuelle sur les entiers.

Toute espèce (appelée aussi maintenant \mathbb{E} -espèce) du §1 peut être considérée comme une espèce linéaire (ou \mathbb{L} -espèce): il suffit de composer avec le *foncteur d'oubli* $\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{E}$.

Les deux espèces suivantes sont "vraiment" des \mathbb{L} -espèces, c'est-à-dire nécessitant un ordre total sur U pour pouvoir définir les M -structures portées par U .

Exemple 3.2. Permutations alternantes.

Par exemples, en prenant $U = [1, n]$, totalement ordonné par la relation d'ordre habituelle sur les entiers, la permutation $\sigma: U \rightarrow U$ est dite *alternante* ssi

$$(41) \quad \sigma(2i - 1) > \sigma(2i) < \sigma(2i + 1) \quad , \quad 1 < 2i < n .$$

Par exemple $\sigma = 5 \ 2 \ 3 \ 1 \ 9 \ 6 \ 7 \ 4 \ 8$. (On note la permutation σ comme un mot $\sigma = \sigma(1) \ \sigma(2) \ \dots \ \sigma(n)$).

Le nombre de permutations alternantes sur $2n + 1$ (resp. $2n$) élément est noté T_{2n+1} (*nombre tangent*) (resp. E_{2n} , *nombre sécant* ou *nombre d'Euler*). Nous voyons que leur série génératrice respective est

$$(42) \quad \sum_{n \geq 0} T_{2n+1} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{tg} t \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} E_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{\cos t} .$$

Exemple 3.3. Arbres binaires croissants.

Définition. Un *arbre binaire croissant* est un arbre binaire étiqueté (définition 1.1, ch. II) dont les sommets sont les entiers $1, 2, \dots, n$ et vérifiant la condition:

tout fils est supérieur à son père.

Exemple:

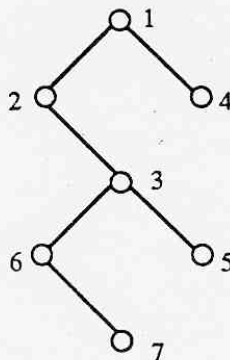


Figure 12. Un arbre binaire croissant.

Nous voyons ci-dessous que le nombre d'arbres binaires croissants sur $[1, n]$ est $n!$. Nous voyons aussi que le nombre d'arbres binaires croissants complets ayant $2n + 1$ sommets (pas de sommets simples, voir ch.II) est le nombre tangent T_{2n+1} (exemple 3.2).

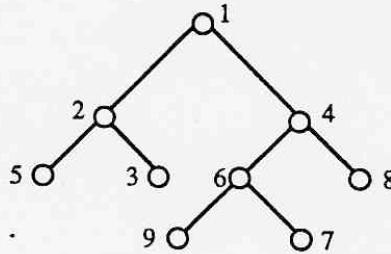


Figure 13. Un arbre binaire croissant complet.

On peut définir, pour les \mathbb{L} -espèces l'analogie des opérations définies au §2 pour les espèces, en particulier *somme*, *produit*, *substitution* et *pointage* de \mathbb{L} -espèces.

Dans la définition 2.5 du produit $F \cdot G$ de deux espèces, on ordonne les sous-ensembles U_1 et U_2 de U par l'ordre induit de U .

Dans la définition 2.9 de la substitution $F(G)$, les ensembles U_1, \dots, U_k sont ordonnés par l'ordre induit de U . L'ensemble quotient $\{U_1, \dots, U_k\}$ est ordonné selon l'ordre des plus petits éléments de chacune des classes.

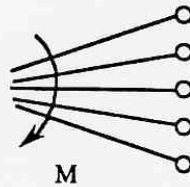
Par contre, nous changeons la définition de la *dérivation*. Une nouvelle notion est introduite: l'*intégration* d'une espèce $\int_0^T M(U) dU$. Enfin, contrairement aux espèces du §2, deux \mathbb{L} -espèces ayant même série génératrice sont "*isomorphes*" (au sens de la théorie de catégories).

Définition 3.4. Soit M une \mathbb{L} -espèce. La *dérivée* M' est définie par

$$(43) \quad M'[U] = M[1 + U]$$

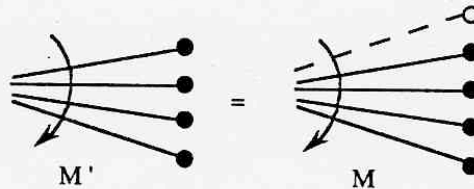
dans lequel $1 + U$ désigne l'ensemble totalement ordonné obtenu en rajoutant un plus petit élément noté "1" à U .

Schématiquement, nous noterons une M -structure sur U par:



la flèche indiquant l'ordre total sur les éléments de U .

Schématiquement, la définition 3.4 de la dérivée peut s'écrire:



Proposition 3.5. Soit M une \mathbb{L} -espèce et M' l'espèce dérivée (définition 3.4). Alors :

$$(44) \quad (M')(t) = \frac{d}{dt} M(t).$$

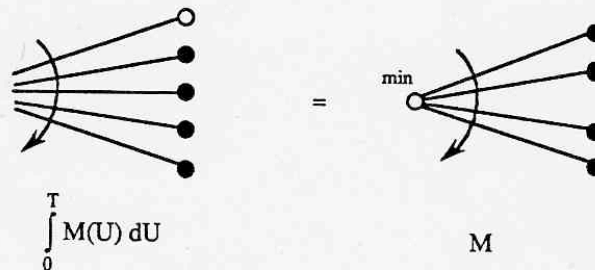
En effet, le coefficient de $t^n/n!$ dans $M'(t)$ est $c_n = a_{n+1}$, en notant $\sum_{n \geq 0} a_n t^n/n! = M(t)$.

Définition 3.6. Soit M une \mathbb{L} -espèce. L'intégrale de M , notée $F = \int_0^T M(U) dU$ est l'espèce linéaire définie par:

$$(45) \quad \begin{aligned} F[\emptyset] &= \emptyset, \text{ et} \\ \text{si } U &= \emptyset, \quad F[U] = M[U \setminus \min(U)]. \end{aligned}$$

$U \setminus \min(U)$ désigne l'ensemble U privé de son élément minimum $\min(U)$.

Schématiquement, la définition 3.6 s'écrit:



Proposition 3.7. Soit M une \mathbb{L} -espèce et $F = \int_0^T M(U) dU$ l'espèce intégrale. Alors :

$$(46) \quad F(t) = \int_0^t M(U) dU.$$

Les opérations de dérivation et intégration vérifient les mêmes règles de calcul, vis à vis des opérations somme, produit, substitution, que celles vérifiées par le calcul usuel sur les fonctions ou séries formelles.

Exemples 3.8. Arbres binaires croissants.

Soit Y l'espèce linéaire des arbres binaires croissants (exemple 3.3 et fig. 12). On vérifie que:

$$(47) \quad Y' \doteq Y^2, \quad Y[\emptyset] = \{\emptyset\} \text{ (arbre vide) ,}$$

ou encore

$$(48) \quad Y = \int_0^T Y(U) dU + 1 .$$

Ainsi la série génératrice $y = y(t)$ satisfait l'équation différentielle:

$$(49) \quad y' = y^2, \quad y(0) = 1 .$$

L'unique solution est $y = 1/(1 - t)$. Le nombre d'arbres binaires croissants sur n éléments est bien $n!$.

Exemple 3.9. Nombres tangents et arbres binaires croissants complets.

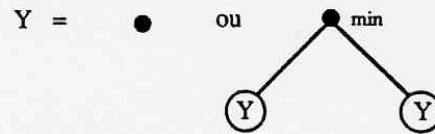
Cette \mathbb{L} -espèce Y (voir fig.13) vérifie l'équation:

$$(50) \quad Y' = 1 + Y_2, \quad Y[\emptyset] = \emptyset ,$$

ou encore

$$(51) \quad Y = T + \int_0^T Y^2(U) dU .$$

Schématiquement, cette équation s'écrit:



La série génératrice est l'unique solution de l'équation différentielle:

$$(52) \quad y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0,$$

c'est-à-dire $y = \text{tg } t$ (fonction *tangente*). On obtient ainsi une interprétation combinatoire des nombres tangents T_{2n+1} définis par

$$\text{tg } t = \sum_{n \geq 0} T_{2n+1} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Exemple 3.10. Nombres sécants.

Les *nombre sécants* E_{2n} , $n \geq 0$, sont les nombres (entiers) apparaissant dans le développement de la fonction *sécante*

$$(53) \quad \frac{1}{\cos t} = \sum_{n \geq 0} E_{2n} \frac{t^{2n}}{2n!}.$$

La fonction sécante $z = 1/\cos t$ est l'unique solution (avec $y' = \text{tg } t$) du système différentiel

$$(54) \quad \begin{cases} z' = yz & , \quad z(0) = 1, \\ y' = 1 + y^2 & , \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

En "relevant" le système d'équations au niveau des objets combinatoires, c'est-à-dire des espèces, il vient

$$(55) \quad \begin{cases} Z' = YZ \\ Y' = 1 + Y^2 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} Z[\emptyset] = \{\emptyset\} \\ Y[\emptyset] = \emptyset \end{cases} .$$

L'unique solution (à "isomorphisme" près de \mathbb{L} -espèces) est la suivante. L'espèce Y est l'espèce des arbres binaires croissants complets (exemple 3.9). L'espèce Z est l'espèce des arbres binaires croissants ayant la propriété suivante:

L'arbre n'a qu'un seul sommet simple, celui-ci est le dernier sommet de la branche droite principale. (voir fig.13*). L'arbre vide fait partie des Z -structures.

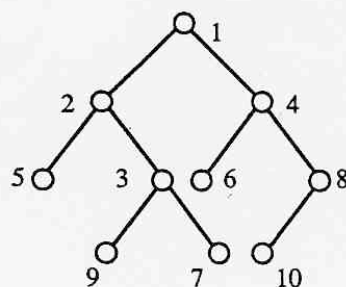


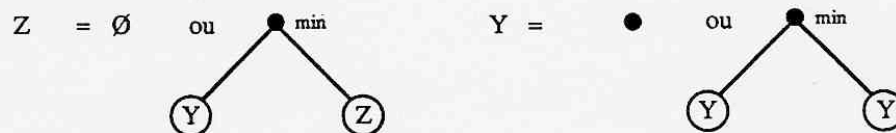
Fig. 13*. Une Z -structure (solution de (55)).

Nous avons ainsi une interprétation combinatoire des nombres sécants E_{2n} , $n \geq 0$. Remarquons que ces arbres binaires croissants sont en bijection avec les arbres binaires croissants complets (Y -structure) tels que le dernier élément de la branche principale droite est l'élément maximum.

Remarquons que le système (55) s'écrit aussi

$$(56) \quad \begin{cases} Z = \int_0^T Y(U) Z(U) dU, \\ Y = 1 + \int_0^T Y^2(U) dU, \end{cases}$$

c'est-à-dire schématiquement



Une itération de ces schémas conduit aux solutions Y et Z sous forme d'arbres binaires croissants.

Exercice 3.12. Une *arborescence 1-2* est une arborescence telle que chaque sommet a au plus deux fils [Le fait de pointer un sommet dans un arbre (de Cayley) permet de définir les notions de fils et de père d'un sommet].

Une *arborescence croissante* est une arborescence sur un ensemble totalement ordonné (par exemple $[1, n]$) telle que tout fils est supérieur à son père. (voir fig.14)

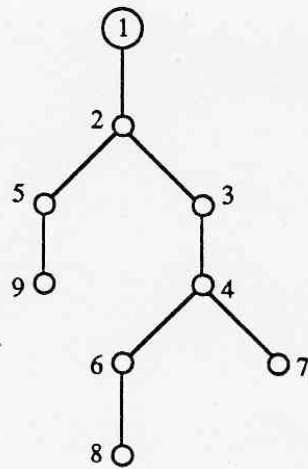


Figure 14. Une arborescence 1-2 croissante.

Montrer que le nombre a_m d'arborescence 1-2 croissantes ayant m sommets est

$$(57) \quad \begin{cases} a_{2n} = E_{2n} & \text{(nombre sécant),} \\ a_{2n+2} = T_{2n+1} & \text{(nombre tangent).} \end{cases}$$

[On utilisera une équation différentielle satisfaite par la \mathbb{L} -espèce des arborescences 1-2 croissantes].

Exercice 3.13. Soit CH (resp. SH) la \mathbb{L} -espèce des ensembles totalement ordonnés de cardinal pair (resp. impair). Démontrer la relation

$$(58) \quad CH^2 = 1 + SH^2.$$

Exercice 3.14. On considère la \mathbb{L} -espèce formée par les assemblées d'arborescences croissantes. Montrer que le nombre de structures (voir exercice 3.12) sur $[1, n]$ est $n!$. [Ecrire l'équation différentielle (ou intégrale) satisfaite par cette \mathbb{L} -espèce].

§4. Polynômes de Sheffer.

\mathbb{K} désigne un anneau commutatif.

Définition 4.1. Une *espèce pondérée* (\mathbb{E} -espèce ou \mathbb{L} -espèce) est une espèce F (au sens des définitions 1.1 ou 3.1), "munie" d'une valuation v , c'est-à-dire qu'à toute F -structure $\alpha \in F[U]$, on associe $v(\alpha) \in \mathbb{K}$ (appelé *poids* ou *valuation* de la F -structure α), et telle que l'on ait la condition suivante (compatibilité avec le transport de structures).

$$(59) \quad \text{pour } f : U \rightarrow V \text{ et } \alpha \in F(U) \xrightarrow{F(f)} \beta \in F(V), \text{ alors } v(\alpha) = v(\beta).$$

La *série génératrice* de l'espèce pondérée F_v sera alors la série $F_v(t) \in \mathbb{K}[[t]]$ définie par

$$(60) \quad F_v(t) = \sum_{n \geq 0} P_n \frac{t^n}{n!} \quad \text{avec} \quad P_n = \sum_{\alpha \in F[U]} v(\alpha).$$

Remarquons que, d'après (59) $U = \{1, \dots, n\}$ la somme $\sum_{\alpha \in F[U]} v(\alpha)$ ne dépend que de la cardinalité de U .

Les propositions des §2 et 3 relatives aux séries génératrices de la somme, produit, composition, pointée, dérivée et intégrale (propositions 2.3, 2.6, 2.11, 2.17, 2.21, 3.5, 3.7) s'étendent aux séries génératrices des espèces pondérées, à condition de définir de la façon suivante ces opérations sur les espèces pondérées.

Soit F et G deux espèces (\mathbb{E} -espèce ou \mathbb{L} -espèce) pondérées respectivement par v_1 et v_2 .

--- *Somme* $Fv_1 + Gv_2$ est l'espèce $F + G$ pondérée par v définie par

$$(61) \quad \text{la restriction de } v \text{ à } F[U] \text{ (resp. } G[U]) \text{ est } v_1 \text{ (resp. } v_2).$$

--- *Produit* $Fv_1 \cdot Gv_2$ est l'espèce $F \cdot G$ pondérée par v définie par

$$(62) \quad \text{pour } \gamma = (U_1, U_2, \alpha, \beta) \in F \cdot G[U], v(\gamma) = v_1(\alpha) v_2(\beta).$$

--- *Substitution* $Fv_1 \circ Gv_2$ est l'espèce $F \circ G$ pondérée par v définie par:

$$\text{pour } \gamma = (\{U_1, \dots, U_k\}; \alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta) \in F \circ G[U],$$

c'est-à-dire (voir définition 29) $\{U_1, \dots, U_k\}$ est une partition de U , $\alpha_i \in G[U]$ pour $1 \leq i \leq k$ et β est une F -structure sur l'ensemble $\{U_1, \dots, U_k\}$, alors

$$(63) \quad v(\gamma) = v_1(\beta) v_2(\alpha_1) \dots v_2(\alpha_k).$$

--- *Pointée* F^*v_1 est l'espèce F^* pondérée par v définie par:

pour $\gamma = (\alpha, x) \in F^*[U]$, c'est-à-dire $\alpha \in F[U]$, $x \in U$, alors

$$(64) \quad v(\gamma) = v_1(\alpha).$$

--- *Dérivée* F_{v_1} est l'espèce dérivée F (définition 2.20 ou 3.4 pour les \mathbb{L} -espèces) pondérée par v définie par:

pour $\gamma \in F[U]$, c'est-à-dire $\gamma \in F[U + \{x\}]$ (resp. $\gamma \in F[1 \} U]$) alors

$$(65) \quad v(\gamma) = v_1(\gamma).$$

--- *Intégrale* $F_v = \int_0^T M_{v_1}(U) dU$ est la \mathbb{L} -espèce $F = \int_0^T M(U) dU$ pondérée par la valuation v définie par:

pour $\gamma \in F[U]$, c'est-à-dire $\gamma \in M[U \setminus \min(U)]$, alors

$$(66) \quad v(\gamma) = v_1(\gamma).$$

Définition 4.2. Une suite $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ de polynômes de $\mathbb{K}[x]$ est dite suite de *polynômes de Sheffer* ssi il existe deux séries génératrices $f(t)$ et $g(t)$ de $\mathbb{K}[[t]]$, avec $f(0) = (0)$, $f'(0) \neq 0$, $g(0) \neq 0$ et telles que

$$(67) \quad \sum_{n \geq 0} P_n(x) \frac{t^n}{n!} = g(t) \exp(x f(t)).$$

Si $g(t) = 1$, la suite $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ est dite de *type binomial*.

La relation (67) implique que chaque $P_n(x)$ est de degré n .

Interprétation combinatoire des polynômes de Sheffer et des polynômes de type binomial.

Soient F et G deux espèces, de séries génératrices respectives $f(t)$ et $g(t)$. Soit H l'espèce

$$(68) \quad H = G \cdot (E \circ F)$$

Alors en notant $P_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} a_{n,k} x^k$, les polynômes de Sheffer définis par (67), le coefficient $a_{n,k}$ est le nombre de H -structures sur un ensemble U de cardinal n , dont l'assemblée de F -structures associée a k composantes (voir fig. 15). Il suffit de pondérer chacune de ces composantes par x .

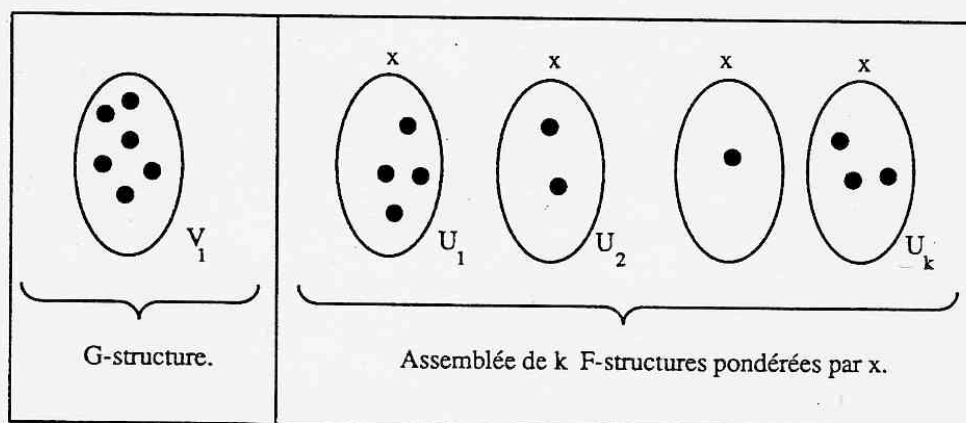


Figure 15. Interprétation combinatoire de polynômes de Sheffer.

Plus généralement, on peut prendre des espèces pondérées Fv_1 et Gv_2 et interpréter des polynômes de Sheffer à coefficients dans \mathbb{K} . En général \mathbb{K} sera l'anneau des polynômes $\mathbb{Z}[X]$ à variables dans un ensemble X .

Pour les polynômes de type binomial, il suffit de ne considérer que des assemblées de F-structures.

Exemple 4.3. Nombres de Stirling $s_{n,k}$.

Soit $s_{n,k}$ le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$ ayant k cycles. Notons

$$(69) \quad s_n(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} s_{n,k} x^k.$$

La suite de polynômes $\{s_n(x)\}_{n \geq 0}$ est de type binomiale. L'égalité (67) devient ici

$$\sum_{n \geq 0} s_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp(x \log(1-t)^{-1}),$$

c'est-à-dire encore

$$(70) \quad \sum_{n \geq 0} s_n(x) \frac{t^n}{n!} = (1-t)^{-x}$$

En développant par la formule du binôme, on obtient

$$(71) \quad s_n(x) = x(x+1)\dots(x+n-1)$$

(voir une preuve bijective de cette dernière relation au §5).

Exemple 4.4. Nombres de Stirling $S_{n,k}$.

Soit $S_{n,k}$ le nombre de partitions de $\{1, \dots, n\}$ ayant k blocs. Notons

$$(72) \quad S_n(x) = \sum_{k \geq 0} S_{n,k} x^k$$

La suite $\{S_n(x)\}_{n \geq 0}$ est de type binomiale, et de série génératrice

$$(73) \quad \sum_{n \geq 0} S_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp(x(e^t - 1)).$$

L'espèce $\mathbb{B} = E \circ E^*$ des partitions (ou assemblée de blocs non vides) peut être valuée par v définie (63) et le fait que $v(\alpha) = x_p$ si α est un bloc de cardinal p .

La série génératrice de l'espèce pondérée \mathbb{B}_v prend la forme

$$(74) \quad \sum_{n \geq 0} Y_n(x_1, x_2, \dots) \frac{t^n}{n!} = \exp \left[\sum_{n \geq 1} x_n \frac{t^n}{n!} \right].$$

Les polynômes $Y_n(x_1, x_2, \dots)$ s'appellent *polynômes exponentiels*.

Exemple 4.5. Polynômes d'Hermite.

Prenons dans (68) les espèces $F = T$ (espèce singleton) et $G = J_v$, l'espèce des involutions sans points fixes, pondérée par v avec $v(\alpha) = -1$ pour tout cycle de longueur 2.

(On peut aussi écrire $J = E \circ (T^2/2)$, assemblée de paires).

Les polynômes de Sheffer associés sont les *polynômes d'Hermite* $H_n(x)$. Dans ce cas la relation (67) devient

$$(75) \quad \sum_{n \geq 0} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(xt - \frac{t^2}{2}\right).$$

La série (75) est aussi la série génératrice de l'espèce des involutions pondérée par v définie par: $v(\alpha) = x$ si α est un point fixe, $v(\alpha) = -1$ si α est un cycle de longueur 2.

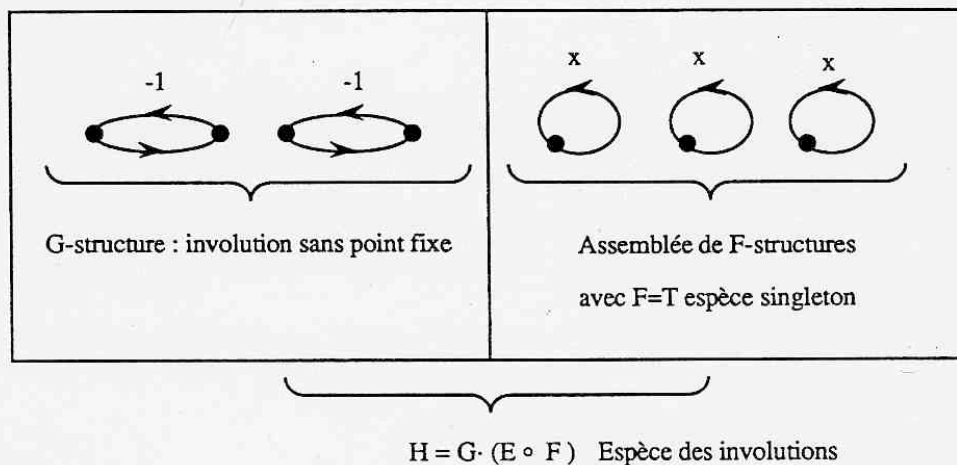


Figure 16. Interprétation combinatoire des polynômes d'Hermite.

Le polynôme d'Hermite $H_n(x)$ est aussi le *polynôme de couplage* (voir définition 3.2, ch.I) du graphe complet K_n (c'est-à-dire le graphe sur $\{1, \dots, n\}$ tel que toute paire $\{i, j\}$, $i \neq j$ est une arête du graphe).

Remarquons que dans la littérature, on rencontre d'autres polynômes appelés polynôme d'Hermite comme par exemple les polynômes $He_n(x) = 2^n H_n(x)$. Ceux que nous désignons par $H_n(x)$ sont les polynômes *unitaires* associés (c'est-à-dire que, tout polynôme de Sheffer $P_n(x)$ défini avec g vérifiant $g(0) = 1$, le coefficient du terme x^n de plus haut degré est 1).

Exemple 4.6. Polynômes de Laguerre $L_n^{(a)}(x)$.

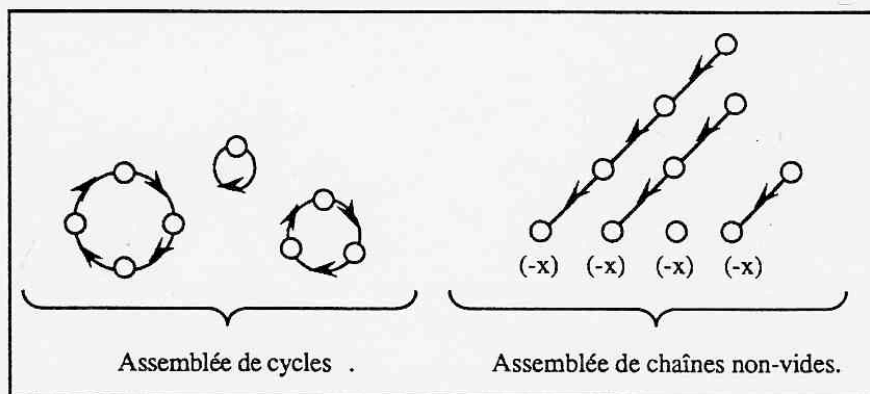
Soit $\text{Lag} = E \circ (C + L^*)$ l'espèce dont les structures sont les assemblées ayant deux types de composantes: les *cycles* et les *chaînes* (ou ordre total) non vides. De telles structures, appelées configuration de Laguerre sont pondérées par v définie par:

le poids d'un cycle est $(a + 1)$, le poids d'une chaîne est $(-x)$.

La série génératrice de l'espèce pondérée Lag_v est alors:

$$(76) \quad \sum_{n \geq 0} L_n^{(a)}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{(1-t)^{a+1}} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right).$$

et définit les polynômes de Laguerre $L_n^{(a)}(x)$ qui sont des polynômes de Sheffer. Ces polynômes dépendent d'un paramètre noté a .



Exercice 4.7. Formule de Mehler pour les polynômes d'Hermite.

Démontrer combinatoirement la formule suivante (dite formule de Mehler)

$$(77) \quad \sum_{n \geq 0} H_n(x) H_n(y) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp \left[\frac{xyt - (x^2 + y^2)t^2/2}{1-t^2} \right].$$

Le lecteur vérifiera d'abord que la superposition de deux involutions α et β sur l'ensemble $\mathbb{U} = \{1, \dots, n\}$ est identique à une assemblée d'objets combinatoires ayant l'un des quatre types suivants:

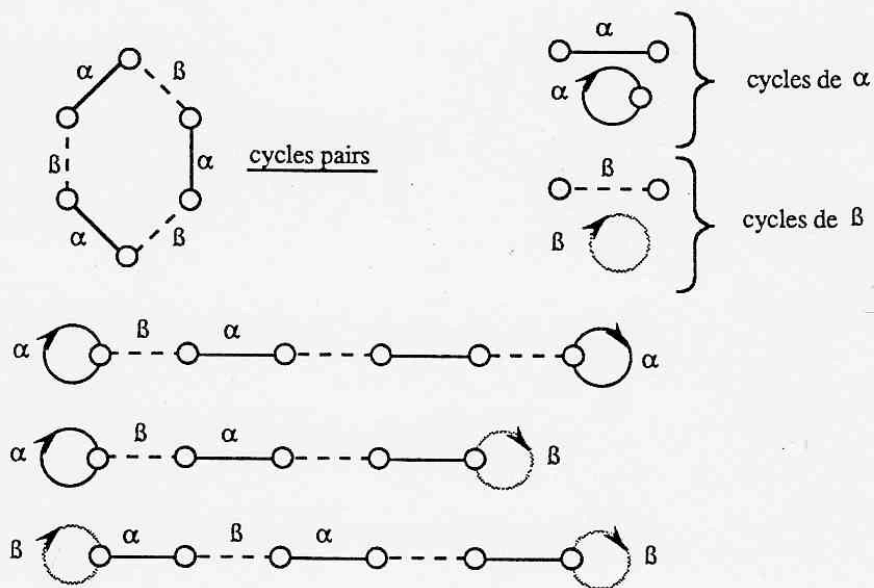


Figure 18. Composantes pour la preuve combinatoire de (77).

Problème 4.8. (Résultats classiques sur les polynômes d'Hermite).

a) **Coefficients.** Démontrer la formule

$$(78) \quad H_n(x) = \sum_{0 \leq 2k < n} (-1)^k \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!} x^{n-2k} .$$

b) **Récurrance linéaire à 3 termes.** Démontrer la formule

$$(79) \quad H_{n+1}(x) = x H_n(x) - H_{n-1}(x)$$

c) **Orthogonalité.**

Soit $f : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}$ la fonctionnelle linéaire définie par son action sur les monômes

$$(80) \quad f(x^{2n+1}) = 0 \quad ; \quad f(x^{2n}) = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \quad (n \geq 0) .$$

En quelque sorte $f(x^m)$ est, pour tout $m \geq 1$, le nombre d'involutions sans points fixes sur le graphe complet K_m (voir exemple 4.5). Soit $K_{n_1} \oplus \dots \oplus K_{n_k}$ le graphe ayant $n_1 + \dots + n_k$ sommets et dont les composantes connexes sont des graphes complets isomorphes à K_{n_1}, \dots, K_{n_k} . Un couplage d'un graphe est dit *parfait* lorsqu'il n'a pas de points isolés. Le nombre $f(x^m)$ est aussi le nombre de couplages parfaits du graphe K_m .

En utilisant l'interprétation combinatoire des polynômes d'Hermite $H_n(x)$ comme polynômes de couplage de K_n , montrer que

$$(81) \quad f(H_{n_1}(x) \dots H_{n_k}(x)) = C_{n_1, \dots, n_k} ,$$

C_{n_1, \dots, n_k} est le nombre de couplages parfaits du graphe $K_{n_1} \oplus \dots \oplus K_{n_k}$ tels que aucune arête du

couplage n'ait les deux sommets dans le même graphe K_{n_i} . [On donnera une preuve bijection avec une involution changeant le signe des termes].

En déduire l'orthogonalité des polynômes d'Hermite, c'est-à-dire

$$(82) \quad \begin{aligned} \int (H_n(x) H_m(x)) e^{-x^2/2} dx &= 0 \quad \text{si } n \neq m, \\ &\neq 0 \quad \text{si } n = m. \end{aligned}$$

Remarque. $f(P(x))$ est aussi la fonctionnelle

$$f(P(x)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) e^{-x^2/2} dx.$$

d) **Formule de Rodrigues.** Démontrer la formule

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}).$$

§5. Bijections sur les permutations.

Nous noterons \mathfrak{S}_n l'ensemble des $n!$ permutations sur $\{1, \dots, n\}$. Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sera écrite comme un *mot* $\sigma = \sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(n)$ du monoïde libre $\{1, \dots, n\}^*$, ou encore par sa représentation en *cycles*, ou encore par son "graphe", c'est-à-dire par l'ensemble des points $\sigma = \{(i, \sigma(i), 1 \leq i \leq n), \sigma \subseteq [1, n] \times [1, n]$.

Exemple:

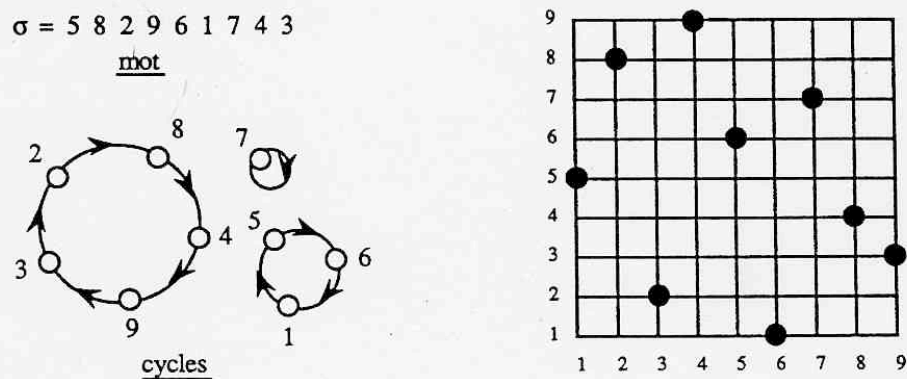


Figure 19. Diverses représentations d'une permutation.

\mathfrak{S}_n est muni d'une structure de groupe pour la composition $\sigma \circ \tau$ des permutations: le *groupe symétrique*. On définit l'inverse σ^{-1} d'une permutation (bijection inverse). On note aussi

$$(83) \quad \sigma^* = \sigma(n) \cdots \sigma(1)$$

l'*image miroir* de σ et σ^c la *permutation complémentaire*, c'est-à-dire définie par

$$(84) \quad \sigma^c(i) = n + 1 - \sigma(i) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Les transformations $\sigma \rightarrow \sigma^{-1}$, $\sigma \rightarrow \sigma^*$, $\sigma \rightarrow \sigma^c$ engendrent groupe de transformations sur \mathfrak{S}_n , qui est isomorphe au groupe des symétries du carré. En revenant à l'interprétation graphique σ , ces 3 transformations correspondent respectivement à la symétrie par rapport à la diagonale principale, l'axe vertical et l'axe horizontal.

a) Cycle et éléments saillants

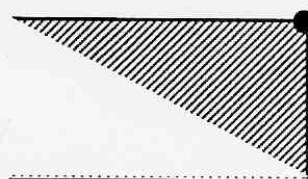
Définition 5.1. L'élément $x \in [1, n]$ est dit *élément saillant* de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ssi

$$(85) \quad x = \sigma(i) < \sigma(j) \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j < i.$$

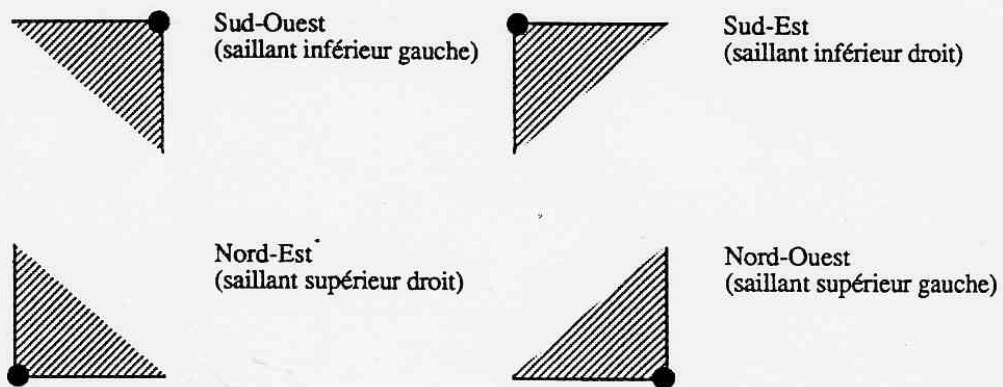
Exemple. Les éléments saillants de $\sigma = \underline{5} \ 8 \ 2 \ 9 \ 6 \ \underline{1} \ 7 \ 4 \ 3$ sont $\{1, 2, 5\}$.

Ce sont les "minima relatifs" lorsqu'on lit la permutation $\sigma = \sigma(1) \dots \sigma(n)$ de gauche à droite.

Remarque 5.2. Dans la représentation graphique σ de σ , les éléments saillants correspondent aux points M de σ tel que le quart de plan Sud-Ouest issu de ce point (voir figure) ne contienne aucun point de σ autre que M .



$M = (i, \sigma(i))$ on aurait en fait quatre notions d'éléments saillants correspondant aux quatre quarts de plan possibles.



Le terme "saillant" sans autres précisions signifiera saillant inférieur gauche.

Bijection 5.3. $\varphi: \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_n$ transformant les éléments saillants en cycles.

Soit σ une permutation. (le mot $\sigma = \sigma(1) \dots \sigma(n)$ se factorise de manière unique en

$$(86) \quad w = x_1 w_1 \dots x_k w_k \text{ avec } x_i \in \{1, \dots, n\}, x_1 > \dots > x_k, \text{ et pour tout } i \in [1, k],$$

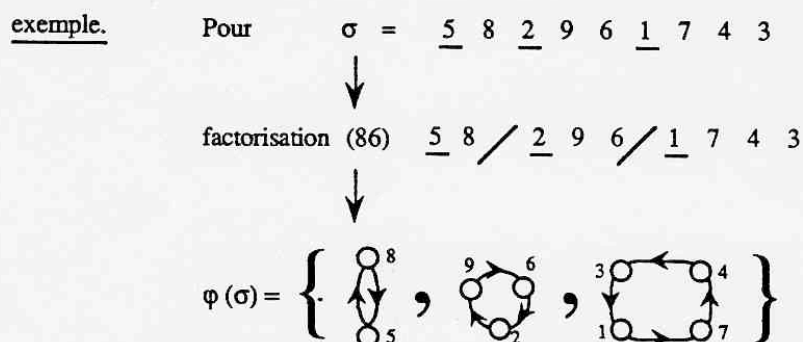
les lettres du mot w_i sont $> x_i$.

Dans l'unique factorisation (86), les lettres x_i sont en fait les éléments saillants de σ .

On définit alors la permutation $\varphi(\sigma)$ par ses cycles.

$$(87) \quad \varphi(\sigma) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\} \text{ dans laquelle } \gamma_i \text{ est le cycle } \gamma_i = (x_i w_i) \text{ (mot } x_i w_i \text{ considéré à}$$

une permutation circulaire près), pour $1 \leq i \leq k$.



Le lecteur montrera que φ est bien une bijection et définira l'application inverse φ^{-1} .

Le nombre de cycles de $\varphi(\sigma)$ est égal au nombre d'éléments saillants de σ . Ainsi le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ayant les k éléments saillants est le nombre de Stirling $s_{n,k}$ défini à l'exemple 4.3.

Exemple 5.4 Recherche du minimum d'une suite (Informatique)

Procédure $\text{min}(w)$

$\{w = a_1 \dots a_n \text{ est une suite de } n \text{ nombres distincts}\}$

début

$m := a_1$

Pour $i = 2$ à n faire

début si $m < a_i$ alors $m := a_i$

fin

$\text{min}(w) := m$

fin

Nous allons faire l'*analyse* de cet algorithme, c'est-à-dire en calculer le coût *moyen*. Nous considérons que le coût est le nombre d'opérations élémentaires à effectuer. Ce nombre est $cn + s(w)$ avec c une constante et $s(w)$ le nombre de fois que l'on effectue l'instruction $m := a_i$.

L'instruction $m := a_i$ est effectuée chaque fois que $a_i = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, c'est-à-dire chaque fois que a_i est élément saillant du mot w .

Le coût moyen est obtenu en prenant une suite "au hasard" de n nombres distincts. Cette "analyse en moyenne" peut se ramener à ne considérer comme entrées de l'algorithme que les permutations de \mathfrak{S}_n , supposés équidistribués. Le coût moyen est alors $cn + 1/n! \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |s(\sigma)|$.

Le paramètre $s(w)$ est appelé *paramètre de l'algorithme*. Calculer sa moyenne est un problème combinatoire.

D'après la formule (71) et en utilisant la bijection ϕ , il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |s(\sigma)| &= \frac{\sum_{1 \leq k \leq n} k s_{n,k}}{n!}, \\ &= \frac{s'_n(1)}{s_n(1)} \quad (s_n(x) \text{ défini par (69)}), \end{aligned}$$

$$(88) \quad \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |s(\sigma)| = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad (\text{d'après (71)}).$$

Le nombre $H_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$ est appelé *nombre harmonique* d'ordre n . Il intervient fréquemment dans les analyses d'algorithmes en Informatique relatifs aux *structures de données*.

Le coût moyen de l'algorithme de recherche du minimum est $cn + H_n$.

Le coût minimum est $cn + 1$, le coût maximum est $cn + n$.

Cet exemple 5.6 est un exemple simple et typique d'analyse d'algorithme en Informatique.

Exercice 5.5. Que devient le paramètre "nombre de montées" de σ par la bijection φ définie en (87). [Rappelons qu'une *montée* de σ est une valeur $x = \sigma(i)$, $1 \leq i < n$ telle que $\sigma(i) < \sigma(i + 1)$].

b) Table d'inversion.

Définition 5.6. Une fonction *sous-excédante* est une application $f : [1, n] \rightarrow [0, n - 1]$ telle que (89) $0 \leq f(i) < i$ pour tout $i \in [1, n]$.

Représentation graphique.

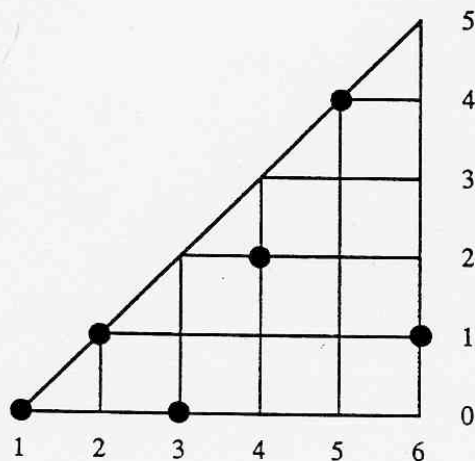


Figure 20. Une fonction sous-excédante.

Notation. Nous noterons \mathfrak{F}_n l'ensemble des fonctions sous-excédantes $f : [1, n] \rightarrow [0, n - 1]$.

On a fait $|\mathfrak{F}_n| = n!$ Remarquons d'ailleurs que \mathfrak{F}_n constitue l'interprétation combinatoire la plus "naturelle" de $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$. Dire que $|\mathfrak{S}_n| = n!$ résulte d'une bijection entre \mathfrak{F}_n et \mathfrak{S}_n .

Bijection 5.7. $I : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{F}_n$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Soit $f \in \mathfrak{F}_n$ définie par la condition

$$(90) \quad \text{pour } x \in [1, n], \quad f(x) = |\{y, 1 \leq j < i, y = \sigma(j) < \sigma(i) = x\}|$$

Exemple: $\sigma = 5 \ 8 \ 2 \ 9 \ 6 \ 1 \ 7 \ 4 \ 3$

↓

$$I(\sigma) = f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nous noterons $f = I(\sigma)$, et l'appellerons *table d'inversion* de la permutation σ .

Proposition 5.8. *L'application $I : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{F}_n$ définie par (90) est une bijection entre les permutations et les fonctions sous-excédantes.*

Nous définissons la bijection inverse de la façon suivante.

Soit $f \in \mathfrak{F}_n$. On "place" la valeur 1 (un seul choix possible). La valeur 2 peut être "placée" selon deux choix possibles: 21 ou 12. Les deux positions correspondent respectivement à $f(2) = 0$ et $f(2) = 1$.

Plus généralement, supposons que l'on ait déjà "placé" les valeurs 1, 2, ..., i pour former un mot σ_i . Les positions possibles pour "placer" la lettre (i + 1) dans le mot σ_i sont numérotées de gauche à droite 0, 1, ..., i. La règle est alors de placer la valeur i + 1 à la position numérotée $f(i + 1)$. A la fin, on obtient la permutation $\sigma_n = I^{-1}(f)$.

Exemple: Pour $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, la construction donne successivement :

$$\begin{array}{r}
 \sigma_1 = \quad \quad \quad \textcircled{1} \\
 \sigma_2 = \quad \quad \textcircled{2} \quad 1 \\
 \sigma_3 = \quad 2 \quad 1 \quad \textcircled{3} \\
 \sigma_4 = \quad 2 \quad 1 \quad \textcircled{4} \quad 3 \\
 \sigma_5 = \quad \textcircled{5} \quad 2 \quad 1 \quad 4 \quad 3 \\
 \sigma_6 = \quad 5 \quad 2 \quad \textcircled{6} \quad 1 \quad 4 \quad 3 \\
 \sigma_7 = \quad 5 \quad 2 \quad 6 \quad 1 \quad \textcircled{7} \quad 4 \quad 3 \\
 \sigma_8 = \quad 5 \quad \textcircled{8} \quad 2 \quad 6 \quad 1 \quad 7 \quad 4 \quad 3 \\
 \sigma_9 = \quad 5 \quad 8 \quad 2 \quad \textcircled{9} \quad 6 \quad 1 \quad 7 \quad 4 \quad 3
 \end{array}$$

Proposition 5.9 La bijection $I: \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{F}_n$ définie par (90) vérifie : pour $f = I(\sigma)$, x est saillant inférieur gauche (resp. droit) de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ssi $f(x) = 0$ (resp. $f(x) = x - 1$).

Remarque 5.10 On pourrait en fait définir huit bijections $\mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{F}_n$ du type "table d'inversion". La bijection I est définie en comptant le nombre de points de σ situés dans le quart de plan Sud-Ouest issu de $(i, \sigma(i))$. On pourrait définir 4 autres bijections en remplaçant Sud-Ouest par respectivement Nord-Ouest, et Nord-Est ou Nord-Ouest (après avoir pris l'image miroir du mot $f(1)\dots(f(n))$).

D'autre part I est définie par "valeur" $\sigma(i)$. On aurait aussi l'analogue J définie par "indice" i , c'est-à-dire $J(\sigma) = g$ avec

$$(91) \quad g(i) = |\{j, 1 \leq j < i, \sigma(j) < \sigma(i)\}|, 1 \leq i \leq n.$$

Ainsi, on aurait en tout huit "tables d'inversion" possibles.

Nombre d'inversions.

Définition 5.11. L'ensemble des inversions de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est l'ensemble des paires définies par

$$(92) \quad \text{Inv}(\sigma) = \{ \{i, j\}, i < j, \sigma(i) > \sigma(j) \}.$$

Le nombre d'éléments de $\text{Inv}(\sigma)$ sera noté

$$(93) \quad \text{inv}(\sigma) = |\text{Inv}(\sigma)|,$$

et est appelé *nombre d'inversions* de σ . Sur le graphe σ de σ , une paire d'inversions $\{i, j\}$ peut être représentée graphiquement par le point

$$(j, \sigma(i)), \text{ (lorsque } i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)).$$

Chaque point de $[1, n] \times [1, n]$ ayant à sa gauche (ouest) et en-dessous (Sud) un point de σ correspond ainsi à une paire d'inversions. (voir figure 21).

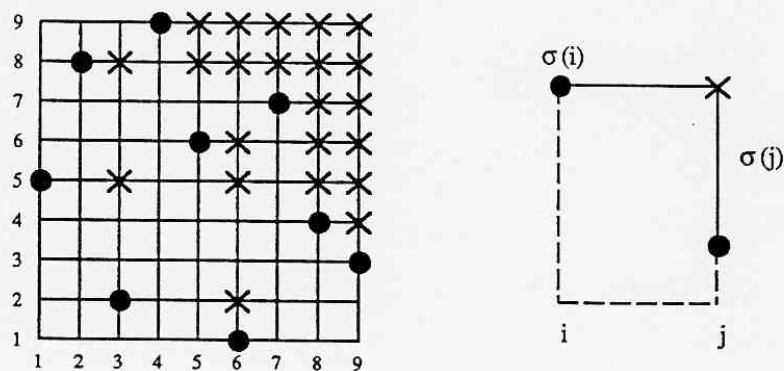


Figure 21. Représentation graphique des paires d'inversions.

Pour $f = I(\sigma)$ définie par (90), on a la relation

$$(94) \quad \text{inv}(\sigma) = \frac{n(n-1)}{2} - \left(\sum_{i=1}^n f(i) \right).$$

En fait, en changeant $I : \sigma \rightarrow f$ en $\bar{I} : \sigma \rightarrow \bar{f}$ avec $\bar{f} \in \mathcal{F}_n$ définie par

$$(95) \quad \bar{f}(i) = i - 1 - f(i) \quad , \quad 1 \leq i \leq n ,$$

il vient

$$(96) \quad \text{inv}(\sigma) = \sum_{i=1}^n \bar{f}(i) .$$

L'application $f \rightarrow \bar{f}$ est une involution sur \mathcal{F}_n . Les deux paramètres $\text{inv}(\sigma)$, pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $\text{som}(f) = \sum_{i=1}^n f(i)$, pour $f \in \mathcal{F}_n$, ont même distribution.

L'objet combinatoire $f \in \mathcal{F}_n$ se décompose en un produit d'objets combinatoires $f_i = (i)$ (au sens de la définition 5.4, ch.II), c'est-à-dire choix de $j \in [0, i - 1]$.

Si la valuation de $f_i = j$ est q^j , la valuation de f est $q^{\text{som}(f)}$. D'après la proposition 5.5, ch.II, on en déduit le polynôme énumérateur des permutations selon le nombre d'inversions.,

Corollaire 5.12.

$$(97) \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} q^{\text{inv}(\sigma)} = 1 (1 + q) (1 + q + q^2) \dots (1 + q + \dots + q^{n-1})$$

le second membre de (97) s'écrit aussi $\prod_{i=1}^n \left(\frac{1 - q^i}{1 - q} \right)$. On l'appelle le *q-analogue* du nombre $n!$ et on le

note aussi $[n!]_q$. C'est un polynôme en q qui vaut $n!$ pour $q = 1$.

Un raisonnement analogue à celui démontrant le corollaire 5.12 permet de démontrer combinatoirement la relation (71) donnant le polynôme énumérateur des permutations selon leur nombre de cycles. D'après la bijection ϕ définie en 5.3 et la proposition 5.9, ce polynôme énumérateur (71) est aussi celui énumérant les fonctions $f \in \mathcal{F}_n$ selon le cardinal de $f^{-1}(0)$.

Pour $j \in [0, i - 1]$, définissons la valuation $v(j) = x$ si $j = 0$, $v(j) = 1$ sinon. Pour $f \in \mathcal{F}_n$, définissons $v(f) = x^k$ avec $k = |f^{-1}(0)|$. Là encore les axiomes de la définition 5.6, ch.II sont satisfaits: $f \in \mathcal{F}_n$ peut être considérée comme le produit des objets valués $f_i = f(i) \in [0, i-1]$. Pour $i \in [n]$, la série génératrice des f_i est $(x + (i - 1))$. D'après la proposition 5.5, ch.II, on retrouve

$$\text{bien la formule (71) } s_n(x) = \prod_{i=1}^n (x + (i - 1)).$$

c) **Permutations et arbres binaires croissants.**

Nous avons défini les arbres binaires croissants à l'exemple 3.3 et avons démontré à l'exemple 3.8 que le nombre de tels arbres binaires sur $\{1, \dots, n\}$ est $n!$. Nous donnons maintenant une bijection entre ces arbres et les permutations.

Notons \mathcal{F}_n l'ensemble des arbres binaires croissants ayant n sommets. Un mot $w \in \{1, \dots, n\}^*$ est dit *linéaire* ssi chaque lettre apparaît au plus une fois. Nous associons récursivement un arbre binaire croissant $\delta(w)$ à tout mot linéaire w par la relation suivante:

$$(98) \quad \begin{cases} - \delta(e) = \emptyset \text{ (mot vide et arbre vide)} \\ - \text{sinon notons } w = umv \text{ avec } m \text{ la plus petite lettre du mot linéaire} \\ \quad w \in \{1, \dots, n\}^*, \text{ alors } \delta(w) = (\delta(u), m, \delta(v)). \end{cases}$$

Exemple: $\sigma = 5\ 8\ 2\ 9\ 6\ 1\ 4\ 3$

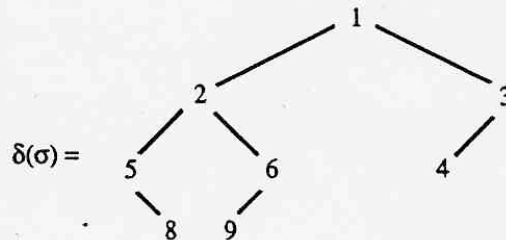


Figure 22. Le déployé d'une permutation.

L'arbre binaire croissant $\delta(w)$ est appelé le *déployé* du mot w .

Réciproquement, si β est un arbre binaire croissant sur $\{1, \dots, n\}$, nous associons une permutation $\sigma = \Pi(\beta)$, appelée *projection* de β , par la récurrence suivante:

$$(99) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \Pi(\emptyset) = e \text{ (arbre vide et mot vide),} \\ - \text{ si } \beta = (\beta_1, r, \beta_2) \text{ est un arbre binaire croissant de racine } r, \text{ alors} \\ \quad \Pi(\beta) = \Pi(\beta_1) r \Pi(\beta_2) \text{ (concaténation des mots).} \end{array} \right.$$

Remarque 5.13. Le mot $\Pi(\beta)$ est aussi le mot obtenu en écrivant de gauche à droite les sommets de β parcourus en ordre symétrique (définition 1.9, ch.II).

Proposition 5.14. L'application $\delta : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{F}_n$ définie par (98) est une bijection entre les permutations sur $\{1, \dots, n\}$ et les arbres binaires croissants sur $\{1, \dots, n\}$. La bijection réciproque est l'application Π définie par (99).

En fait, nous aurons besoin d'une autre définition, non récursive, de l'application δ . Celle-ci repose sur la notion suivante.

Définition 5.15. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $x \in [1, n]$. Il existe une unique factorisation du mot σ , appelée la *x-factorisation* de σ , vérifiant les trois conditions suivantes:

- (i) $\sigma = u\lambda(x)x\rho(x)v$ dans lequel u , $\lambda(x)$, $\rho(x)$ et v sont des mots (éventuellement vides) de $\{1, \dots, n\}^*$,
- (ii) les lettres de $\lambda(x)$ et $\rho(x)$ sont $> x$,
- (iii) les longueurs de $\lambda(x)$ et $\rho(x)$ sont maximales parmi les factorisations vérifiant (i) et (ii).
En d'autres termes, soit u (resp. v) est vide, soit sa dernière (resp. première) lettre est $< x$.
On pourrait alors démontrer la

Proposition 5.16. Soient σ une permutation de \mathfrak{S}_n , avec $\delta(\sigma)$ son déployé par la bijection (98) et x un élément de $[1, n]$. Soit $\sigma = u\lambda(x)x\rho(x)v$ la *x-factorisation* de σ (définition 5.15).

Le sommet x de l'arbre binaire croissant $\delta(\sigma)$ n'a pas de fils gauche (resp. droit) $\lambda(x) = e$ (resp. $\rho(x) = e$). Dans le cas contraire, le fils gauche (resp. droit) de x est la plus petite lettre du mot $\lambda(x)$ (resp. $\rho(x)$).

De plus, le sous-arbre gauche (resp. droit) de $\delta(\sigma)$ enraciné en x est $\delta(\lambda(x))$ (resp. $\delta(\rho(x))$).

Exemple:

Pour $\sigma = 5\ 8\ 2\ 9\ 6\ 1\ 4\ 3$ et $x = 2$, la *x-factorisation* est $\sigma = \begin{matrix} (58) & 2 & (96) & 14 & 3. \\ (u=e) & \lambda(2) & & \rho(2) & \end{matrix}$

Le fils gauche de 2 est 5, le fils droit de 2 est 6 (voir figure 22).

Définition 5.17. Soit σ une permutation de \mathfrak{S}_n . Faisons la convention $\sigma(0) = \sigma(n+1) = 0$.

Nous dirons que $x = \sigma(i)$ est respectivement (pour $1 \leq i \leq n$),

pic ssi $\sigma(i-1) < x > \sigma(i+1)$,

creux ssi $\sigma(i-1) > x < \sigma(i+1)$,

double montée ssi $\sigma(i-1) < x < \sigma(i+1)$,

double descente ssi $\sigma(i-1) > x > \sigma(i+1)$.

De la proposition 5.16, on déduit aisément la

Proposition 5.18 Soient σ une permutation de \mathfrak{S}_n , avec $\delta(\sigma)$ son déployé par la bijection (98) et x un élément de $[1, n]$.

(i) Le sommet x de l'arbre binaire croissant $\delta(\sigma)$ est une feuille (resp. sommet double, resp. sommet simple à droite, resp. sommet simple à gauche) ssi x est un pic (resp. creux, resp. double monté, resp. double descente) de la permutation σ .

(ii) La branche gauche (resp. droite) de $\delta(\sigma)$ est l'ensemble des éléments saillants inférieurs gauches (resp. droite) de σ .

Exemple: Pour $\sigma = 5\ 8\ 2\ 9\ 6\ 1\ 4\ 3$, notée aussi avec ses montées et descentes sous la forme $\sigma = 5/8 \setminus 2/9 \setminus 6/1 \setminus 4/3 \setminus$, les pics sont 4, 8, 9; les creux 1, 2; double montée 5; double descente 6. On comparera avec l'arbre binaire croissant de la figure 22.

Corollaire. La restriction de $\Pi = \delta^{-1}$, définie en (99), aux arbres binaires croissants complets sur $[1, 2n+1]$ (ex. 3.9) (resp. aux arbres binaires croissants appelés Z-structures à l'exemple 3.10 et ayant $2n$ sommets) est une bijection entre ces arbres binaires et les *permutations alternantes* sur $[1, 2n+1]$ (resp. $[1, 2n]$). Nous avons ainsi démontré l'identité (42) énoncée à l'exemple 3.2.

d) **Permutations et arborescences croissantes.**

A l'exercice 3.12, nous avons défini la notion d'*arborescences croissantes*. L'exercice 3.14 prouve que le nombre d'assemblée d'arborescences croissantes sur $[1, n]$ est égal à $n!$. Nous construisons ici des bijections entre ces assemblées et \mathcal{F}_n et \mathcal{S}_n .

Soi ω une assemblée d'arborescences croissantes sur $U = [1, n]$. Nous définissons la fonction sous-excédante $f \in \mathcal{F}_n$ par la relation

$$(100) \quad \begin{cases} \text{Pour } x \in [1, n], f(x) = 0 \text{ si } x \text{ est racine de l'une des arborescences de } \omega, \\ \text{sinon } f(x) \text{ est le père de } x. \end{cases}$$

L'application $\omega \rightarrow f$ est une bijection (entre les assemblées d'arborescences croissantes ayant n sommets et les fonctions sous-excédantes \mathcal{F}_n)

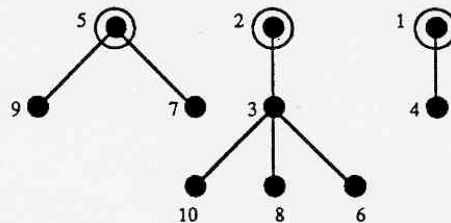


Figure 23. Une assemblée d'arborescences croissantes.

Exemple. L'application f associée à l'assemblée de la figure 23 est

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Un *arbre planaire croissant* est un arbre planaire étiqueté (définition 1.14, ch.II) dont les sommets sont les entiers $1, 2, \dots, n$ et tel que tout fils est supérieur à son père. Une *forêt* d'arbres planaires croissants est un ensemble ordonné d'arbres planaires croissants.

Ces structures forment deux autres exemples de \mathbb{L} -espèce.

A toute forêt d'arbres planaires croissants, on peut associer une assemblée d'arborescences croissantes par "oubli" de l'ordre des fils de chaque sommet et de l'ordre des arbres de la forêt. Inversement, à toute assemblée d'arborescences croissantes $\omega = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$, on peut associer une forêt d'arbres croissants $\Psi^{(\omega)}$ en ordonnant les arborescences selon l'ordre décroissant de leur racine, ainsi que les fils de chaque sommet selon l'ordre décroissant. C'est ce que nous avons fait sur la figure 23. En parcourant cette forêt en ordre préfixe, c'est-à-dire que chaque arbre est parcouru en ordre préfixe (définition 1.16, ch.II), du premier au dernier arbre de la forêt, on obtient une suite de sommets x_1, \dots, x_n . Le mot $\sigma = x_1, \dots, x_n$ est une permutation de \mathfrak{S}_n . Notons $\sigma = \xi(\omega)$.

Exemple: Pour ω l'assemblée d'arborescences croissantes de la figure 23,

$$\xi(\omega) = 5 \ 9 \ 7 \ 2 \ 3 \ (10) \ 8 \ 6 \ 1 \ 4 .$$

Proposition 5.19. *L'application $\xi : \omega \rightarrow \sigma$ définie ci-dessus est une bijection entre les assemblées d'arborescences croissantes sur $[1, n]$ et les permutations de \mathfrak{S}_n .*

La bijection réciproque ξ^{-1} est définie de la façon suivante.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, soit $\eta(\sigma) = f \in \mathfrak{F}_n$ la fonction sous-excédante définie par la relation suivante

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } x \in [1, n] \text{ avec } x = \sigma(i), f(x) = y \text{ tel que} \\ \text{- si } x \text{ est élément saillant de } \sigma, \text{ alors } y = 0 \\ \text{- sinon } y = \sigma(j) \text{ avec} \\ \quad j = \max \{j, j < i, \sigma(j) < \sigma(i)\} . \end{array} \right.$$

Exemple: Pour $\sigma = 5\ 9\ 7\ 2\ 3\ (10)\ 8\ 6\ 1\ 4$, alors

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le lecteur prouvera la

Proposition 5.20. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $f = \eta(\sigma)$ la fonction sous-excédente définie par (101). Soit σ l'assemblée d'arborescences croissantes associée à f par la relation (100). Alors $\sigma = \xi^{-1}(\sigma)$.

On peut encore appliquer à la forêt d'arbres croissants $\psi(\sigma)$ la transformation duale (bijection duale 1.19, ch.II) pour obtenir un arbre binaire croissant. Le lecteur démontrera que cet arbre est $\delta(\sigma)$ pour $\sigma = \xi(\omega)$.

Exemple:

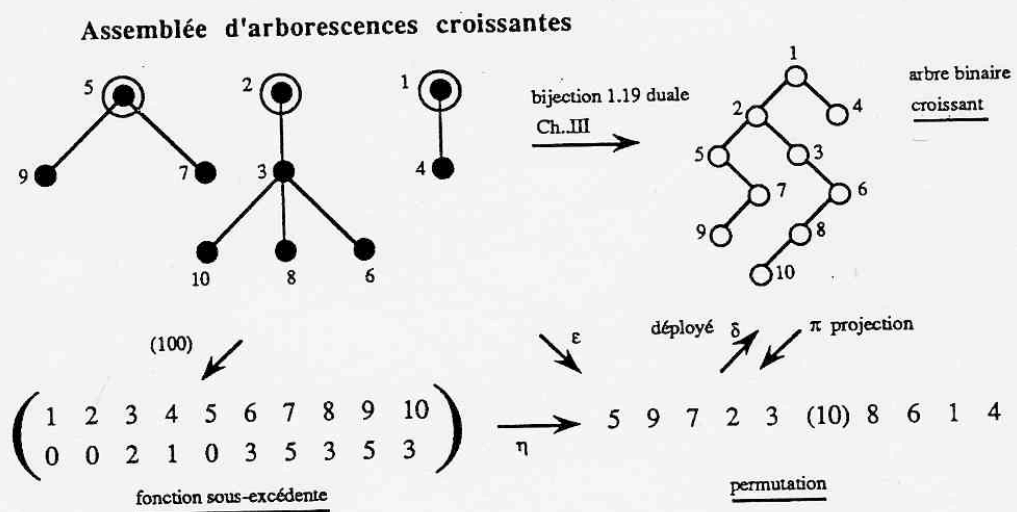


Figure 24. Diagramme commutatif des bijections du $\{S, d\}$.

Les principales propriétés de la bijection ξ sont les suivantes:

Proposition 5.21. *Soit σ une assemblée d'arborescences croissantes et $\sigma = \xi(\omega)$ la permutation associée:*

- (i) *les racines des arborescences de ω sont les éléments saillants de ω ,*
- (ii) *pour $x \in [1, n]$, le sommet x est une feuille de σ (pas de fils) sur x est soit une descente de σ (c'est-à-dire $x = \sigma(i) > \sigma(i+1)$, soit $x = \sigma(n)$).*
- (iii) *si $x \in [1, n]$ est une montée de σ , alors les fils de x dans σ sont les éléments saillants du mot $\rho(x)$ (non vide) de la x -factorisation de σ (définition 5.15).*
- (iv) *l'assemblée d'arborescences formée par les sous-arborescences ayant pour racines les fils du sommet x , est exactement $\xi^{-1}(\rho(x))$.*

§6. Autres exercices.

Problème 6.1. Permutations de Jacobi.

Il s'agit d'interpréter combinatoirement le système d'équations différentielles

$$(102) \quad \begin{cases} y' = z^2 & , & y(0) = 0 , \\ z' = yz & , & z(0) = 1 , \end{cases}$$

dont l'unique solution est $y = \operatorname{tg} t$ et $z = 1/\cos t$.

Définition. On appelle *permutation de Jacobi* une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ telle que pour $x \in [1, n]$, le mot $\rho(x)$ de la x -factorisation (définition 5.15) soit de longueur paire.

Exemple: $\sigma = 7 \ 2 \ 8 \ 5 \ 1 \ 4 \ 9 \ 6 \ 3$.

Soit Y (resp. Z) la \mathbb{L} -espèce des permutations de Jacobi sur un ensemble impair (resp. pair) d'éléments.

a) Montrer que les \mathbb{L} -espèces Y et Z satisfont le système d'équations différentielles

$$(103) \quad \begin{cases} Y' = Z^2 & , & Y[\emptyset] = \emptyset , \\ Z' = YZ & , & Z[\emptyset] = \{\emptyset\} . \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi, avec les permutations alternantes (ou arbres binaires complets, exemple 3.9 et exemple 3.10) et avec les arborescences 1-2 croissantes (exercice 3.12) une troisième interprétation combinatoire des nombres tangents et sécants. Ces trois interprétations sont associées à trois systèmes différentiels différents.

b) En déduire que le nombre d'*assemblées d'arborescences croissantes* sur $[1, m]$ telles que tout sommet ait un nombre pair de fils est également E_{2n} pour $m = 2n$ et T_{2n+1} pour $m = 2n + 1$. [On donnera une bijection avec les permutations de Jacobi].

c) En déduire une preuve combinatoire de l'identité.

$$(104) \quad \exp\left(\int_0^t \frac{du}{\cos u}\right) = \operatorname{tg} t + \frac{1}{\cos t}.$$

Exercice 6.2. Polynômes Eulériens.

Soit $a_{n,k}$ le nombre de permutations de $[1, n]$ ayant k *montées* (c'est-à-dire k valeurs $x = \sigma(i) < \sigma(i+1)$). Le *polynôme Eulérien* d'ordre n est

$$(105) \quad A_n(x) = \sum_{0 \leq k < n} a_{n,k} x^k.$$

(voir aussi exercice 3.4, ch.I)

Montrer combinatoirement les relations

$$(106) \quad \begin{cases} A_{2n}(-1) = 0 \\ A_{2n+1}(-1) = (-1)^n E_{2n+1} \end{cases}$$

[On construira une involution agissant sur les arbres binaires croissants].

Exercice 6.3. Tableau de Kempner.

On considère le tableau suivant où apparaissent les nombres tangents et sécants

				①						$\operatorname{tg} t = t + 2\frac{t^3}{3!} + 16\frac{t^5}{5!} + 272\frac{t^7}{7!} + \dots$
				①	0					
			0	1	①					$\frac{1}{\cos t} = 1 + \frac{t^2}{2!} + 5\frac{t^4}{4!} + 61\frac{t^6}{6!} + \dots$
		②	2	1	0					
	0	2	4	5	⑤					
	①⑥	16	14	10	5	0				
0	16	32	46	56	61	⑥①				
②⑦②	272	256	224	178	122	61	0			
...	

Table.
Tableau de Kempner
des nombres tangents et sécants

- a) découvrir la règle de formation de ce tableau.
- b) montrer que ces coefficients dénombrent les permutations alternantes selon la valeur de la dernière lettre [on utilisera la table d'inversion "par indice"]
- c) généraliser b) au calcul du nombre de permutations σ ayant une *forme* donnée.

La *forme* d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est le mot $w = w_1 \dots w_{n-1}$ de longueur $n - 1$ écrit sur l'alphabet $\{+, -\}$ et défini par

$$(107) \quad \begin{cases} w_i = + & \text{si } \sigma(i) < \sigma(i+1) & \text{(montée),} \\ w_i = - & \text{si } \sigma(i) > \sigma(i+1) & \text{(descente).} \end{cases}$$

par exemple, pour $\sigma = 3 \ 5 \ 6 \ 1 \ 4 \ 2$, la forme est $w = ++-+-$. Il y a 35 permutations ayant cette forme w .

Les permutations alternantes sont les permutations ayant la forme $(-+-+\dots)$.

Exercice 6.4. Indice de Major.

L'*indice du major* (du à Mac Mahon) d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est le nombre $\text{maj}(\sigma)$ défini par

$$(108) \quad \text{maj } \sigma = \sum_{i \in \text{Des}(\sigma)} i ,$$

avec $\text{Des}(\sigma) = \{i, 1 \leq i < n - 1, \sigma(i) > \sigma(i + 1)\}$. En quelque sorte l'indice du major $\text{maj}(\sigma)$ est la somme des indices des descentes de σ .

L'exercice consiste à démontrer que ce paramètre a la même distribution que le paramètre "*nombre d'inversions*" (relation (97)), c'est-à-dire


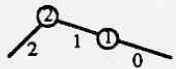


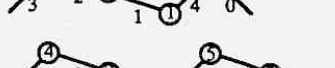
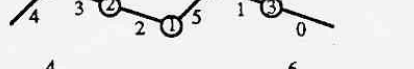
$$(109) \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{maj}(\sigma)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{inv}(\sigma)}$$

Ce fait sera déduit de la bijection suivante entre \mathfrak{F}_n et \mathfrak{S}_n . On construit une application $\xi : \mathfrak{F}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ de manière analogue à Γ^{-1} (voir proposition 5.8, et l'exemple qui suit) mais avec un autre numérotage des positions possibles de $c + 1$.

Si σ_i est le mot linéaire de $\{1, \dots, i\}^*$ construit à partir de $f(1) \dots f(i)$, alors on considère la *forme* du mot $0 \sigma_i 0$ (voir exercice 6.3, c). Les $p \geq 1$ descentes sont numérotées de droite à gauche $0, 1, \dots, p-1$ puis les $i + 1 - p \geq 1$ montées $p, p + 1, \dots, i$ de gauche à droite. On insère alors $(i + 1)$ dans le mot σ_i à la position numérotée $f(i + 1)$ pour former le mot σ_{i+1} . Alors, par définition,

$$(110) \quad \eta(f) = \sigma_n.$$

Exemple: pour $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, il vient

$c_1 =$	1	
$c_2 =$	2 1	
$c_3 =$	2 1 3	
$c_4 =$	4 2 1 3	
$c_5 =$	4 2 1 5 3	
$\eta(f) = c_6 =$	4 2 1 5 6 3	

$\text{Des}(\eta(f)) = \{1, 2, 5\},$
 $\text{maj}(\eta(f)) = 1 + 2 + 5 = 8,$
 $\text{som}(f) = 1 + 2 + 6 + 1 = 8. \text{ (voir définition au §5, b)}$

Le lecteur démontrera que $\eta : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{G}_n$ est une bijection vérifiant la condition.

$$(111) \quad \text{som}(f) = \text{maj}(\eta(f)).$$

D'après §5, b), cette relation implique (109).