Les preuves sans mots

(1ère partie)

Texte

Xavier Viennot

LaBRI, CNRS, Bordeaux

avec

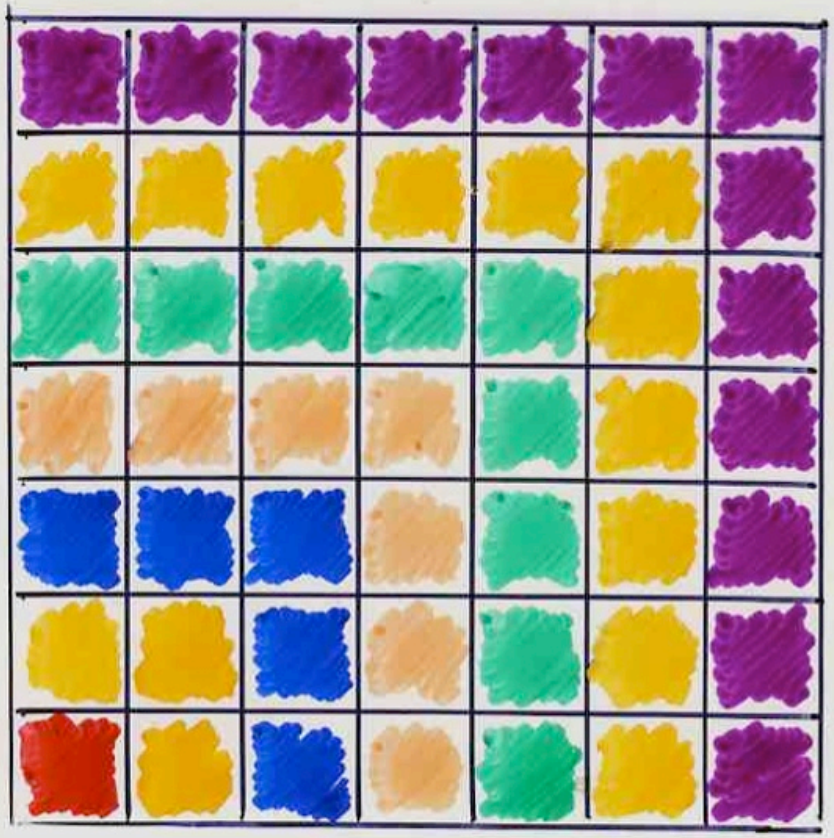
Gérard H.E. Duchamp (violon)

LIPN, Sorbonne Universités

Metz 2012

Journées nationales APMEP

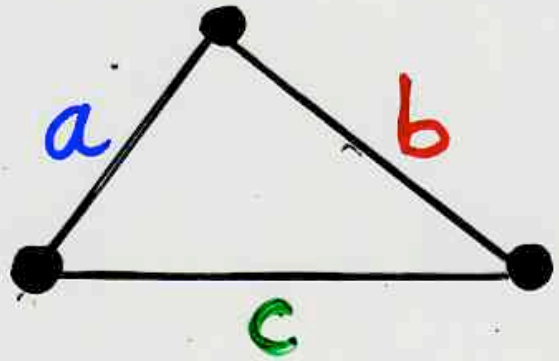
30 octobre 2012

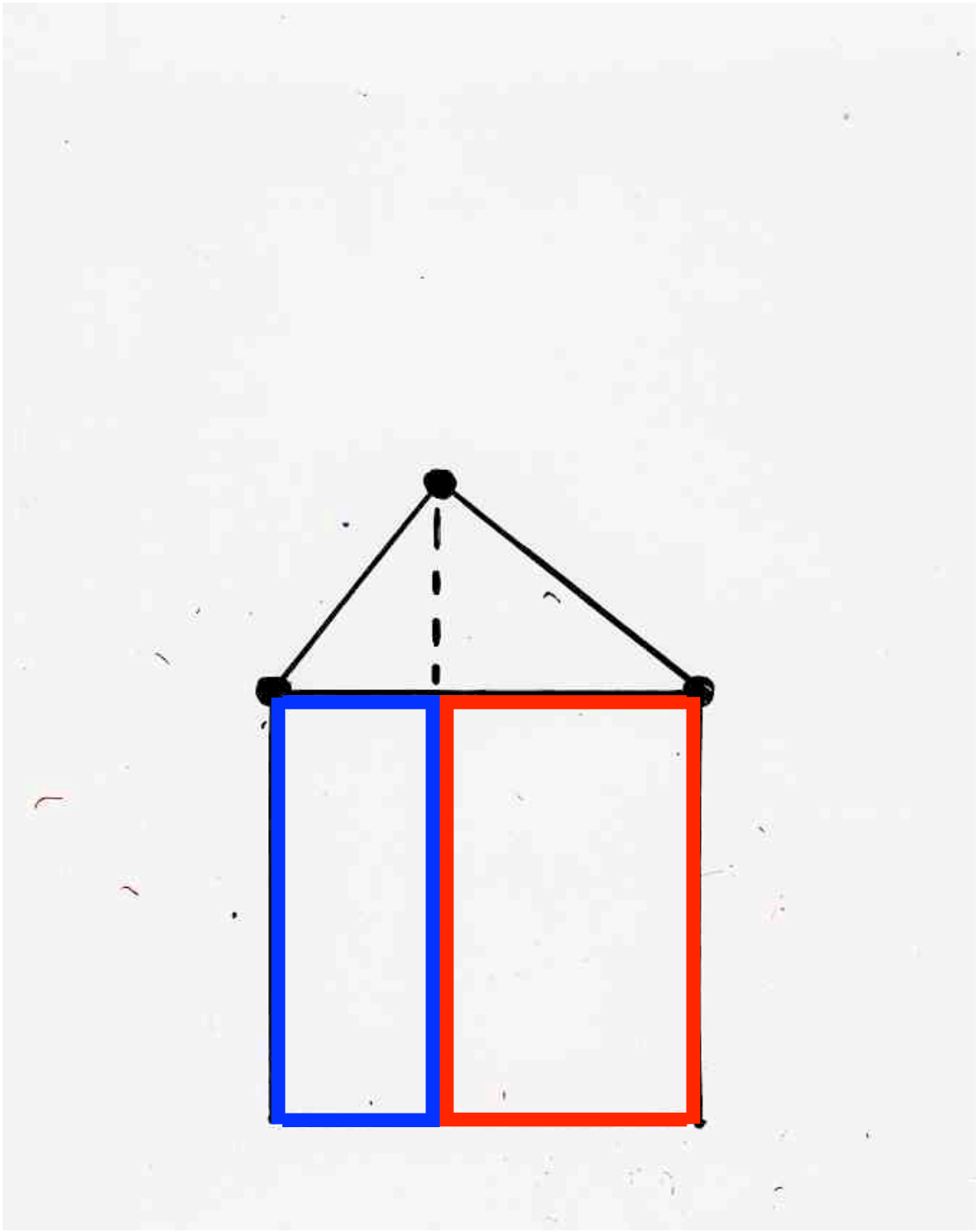


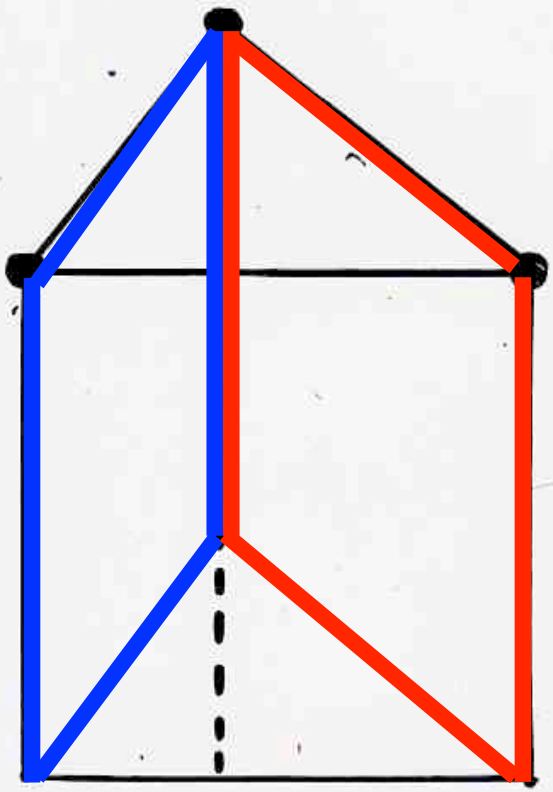
$$n^2 = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$$

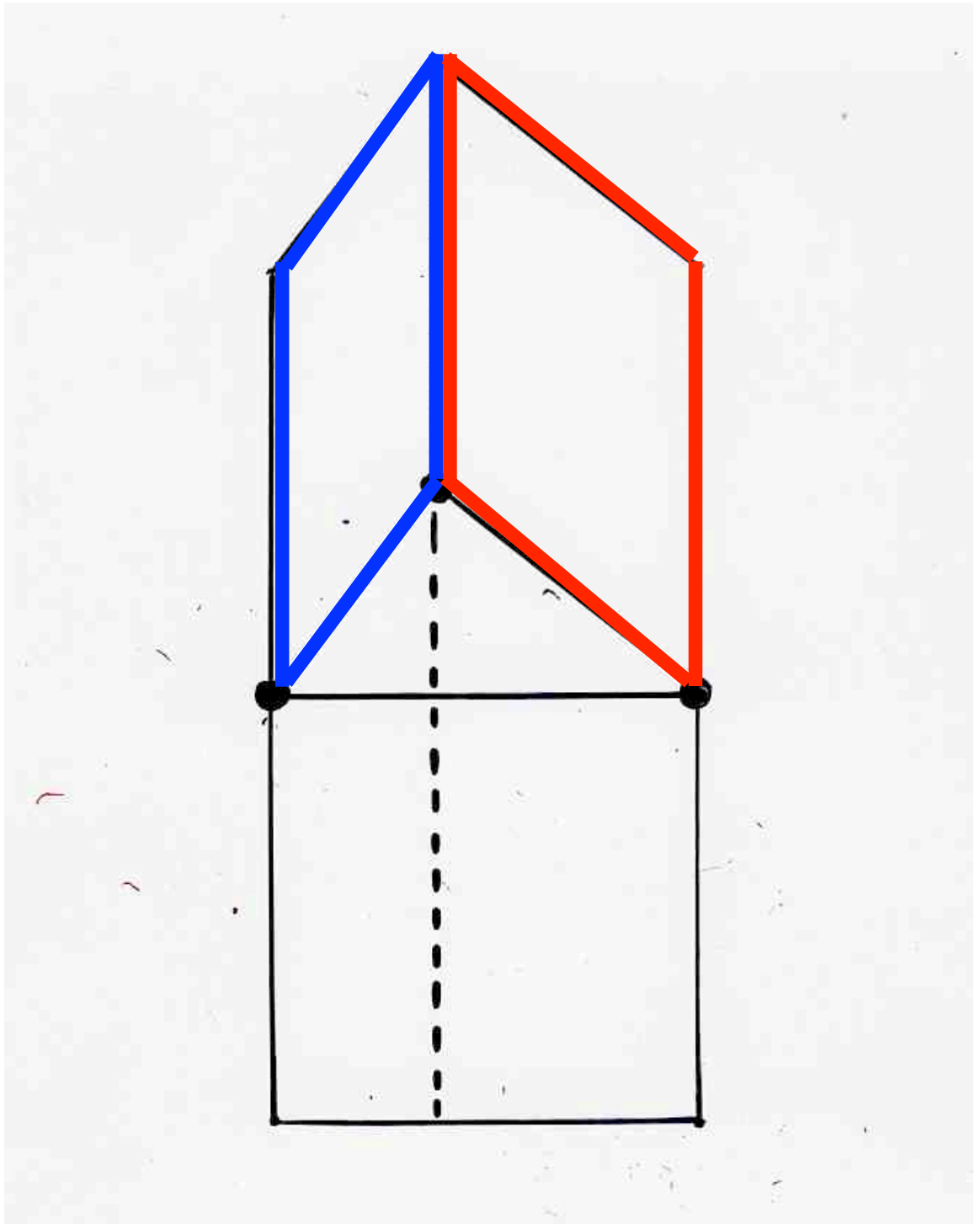
comme disait Pythagore ....

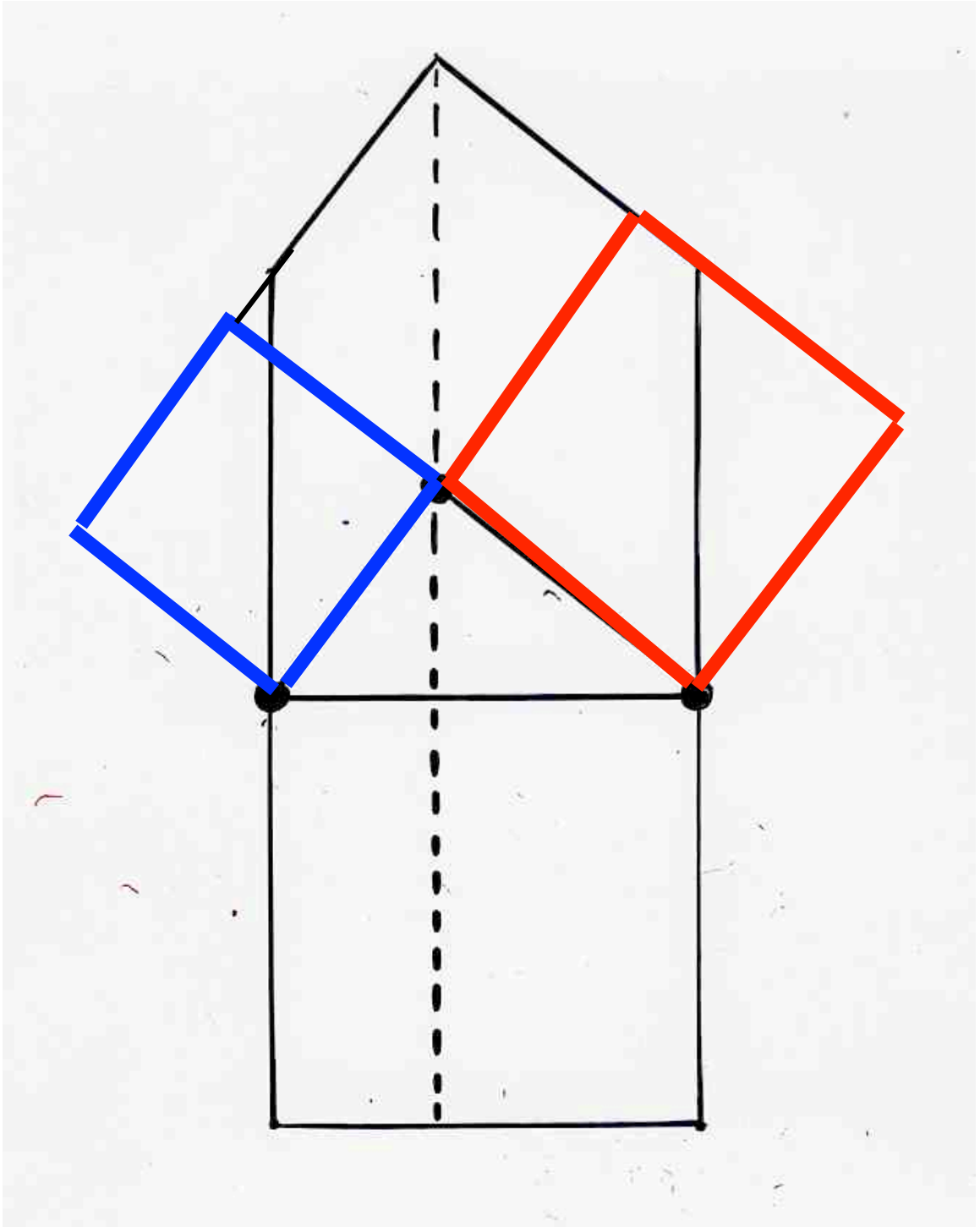
animation au violon

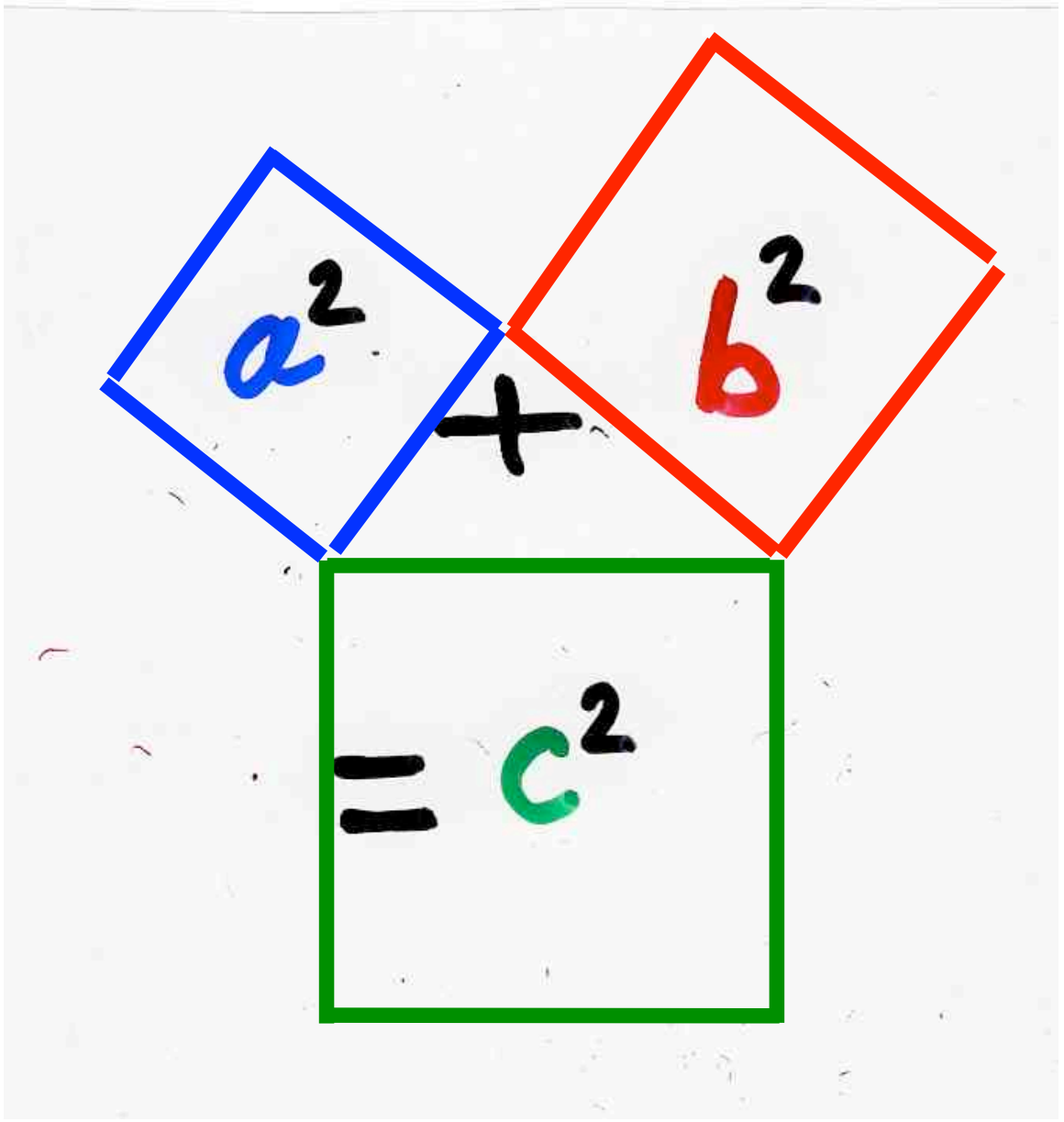

a
b
c





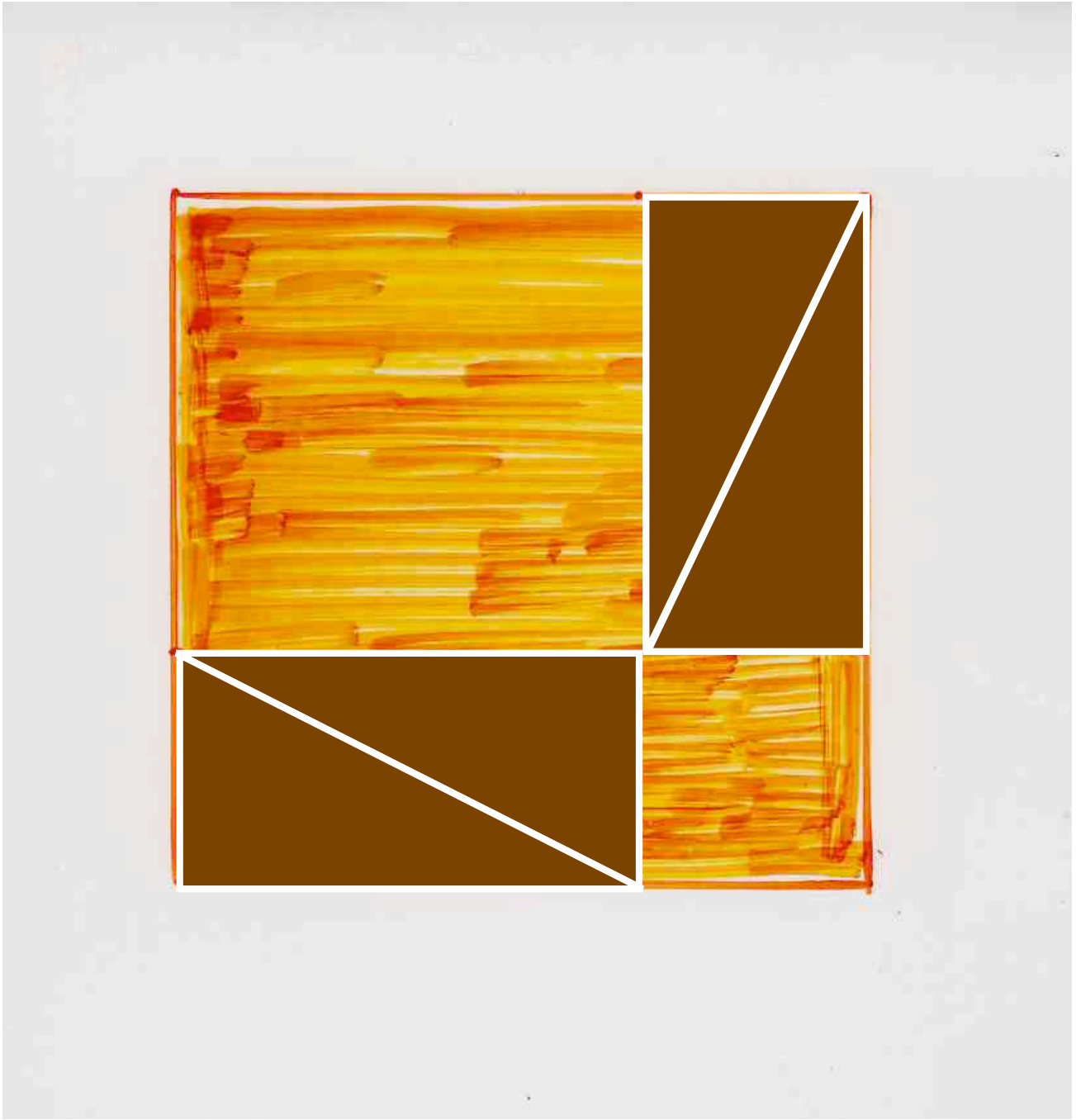


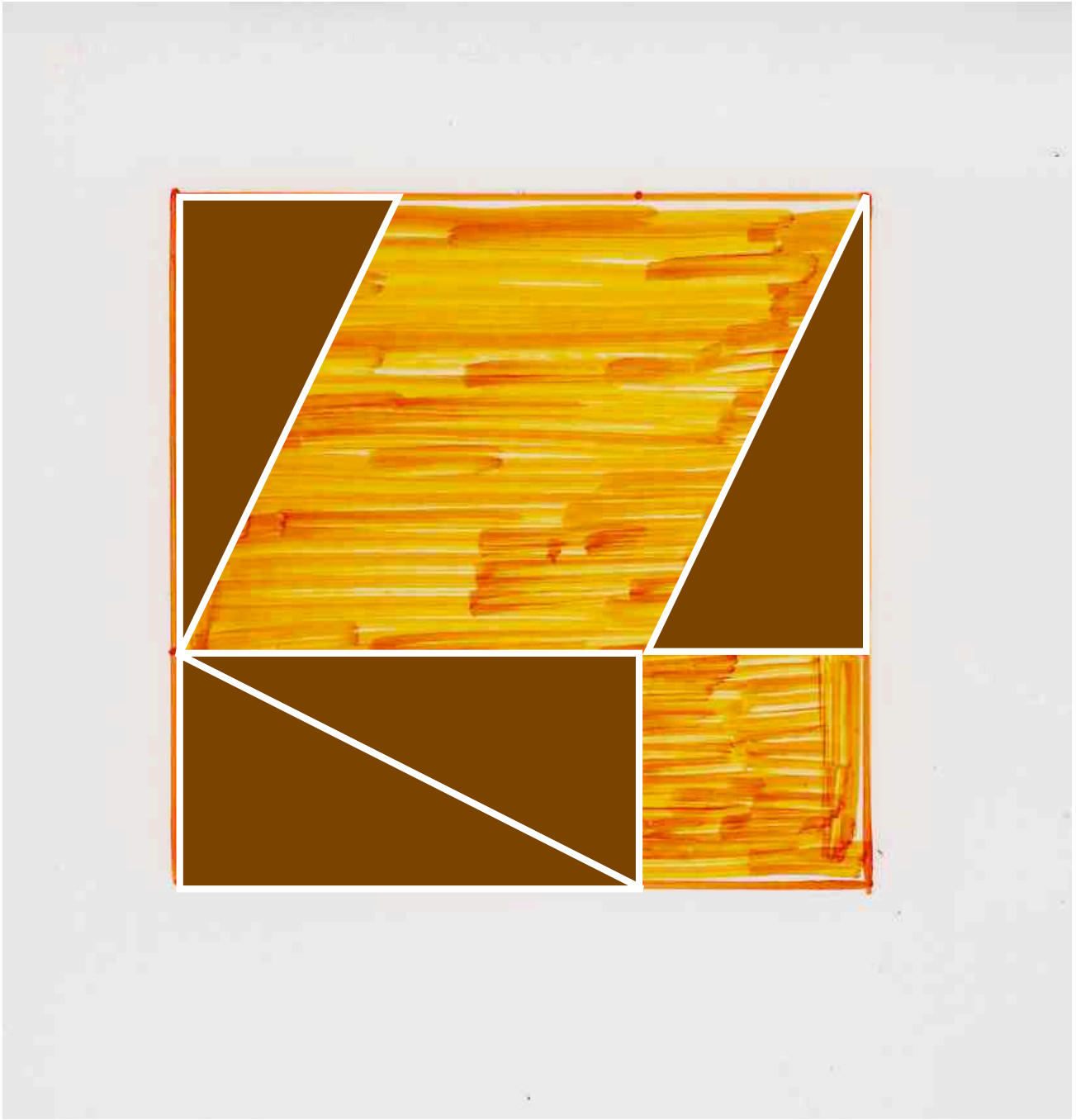


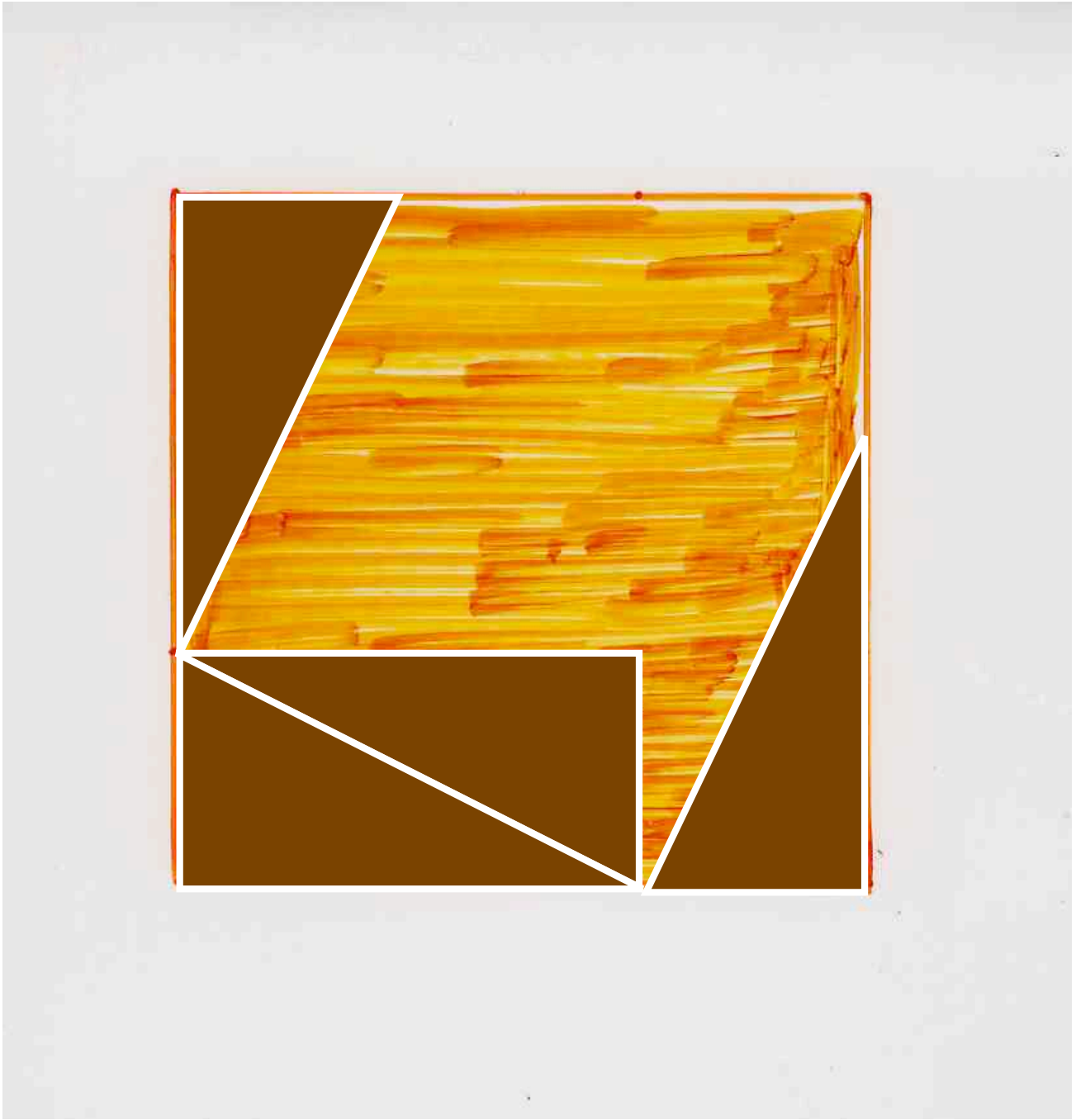

a^2
+
b^2
$= c^2$

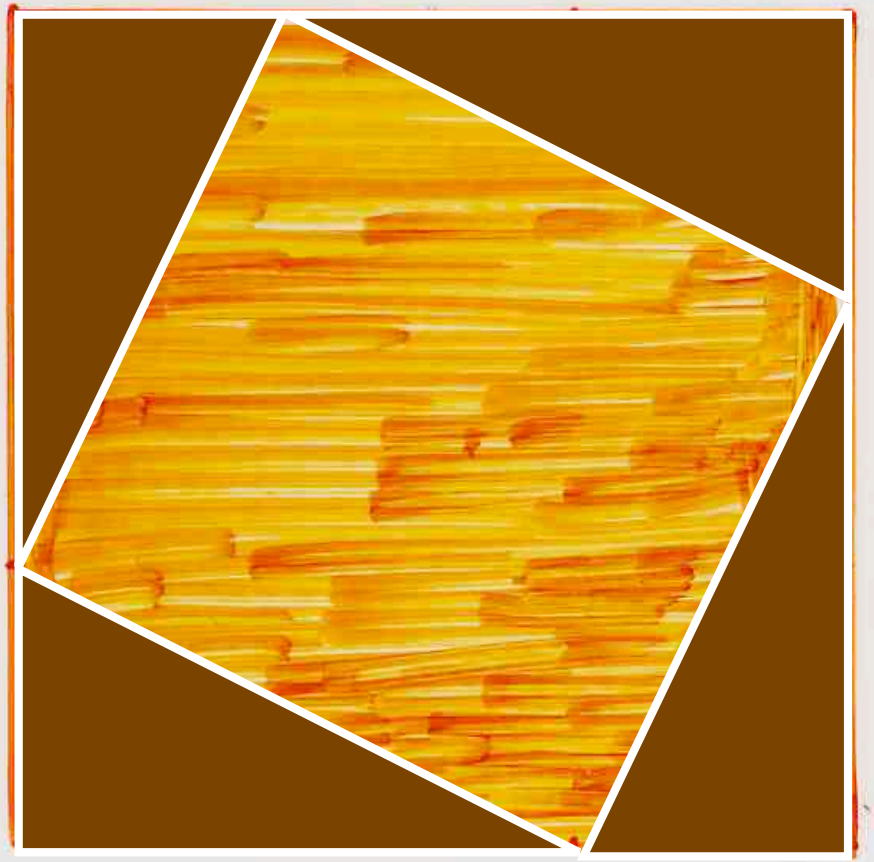
encore Pythagore ....

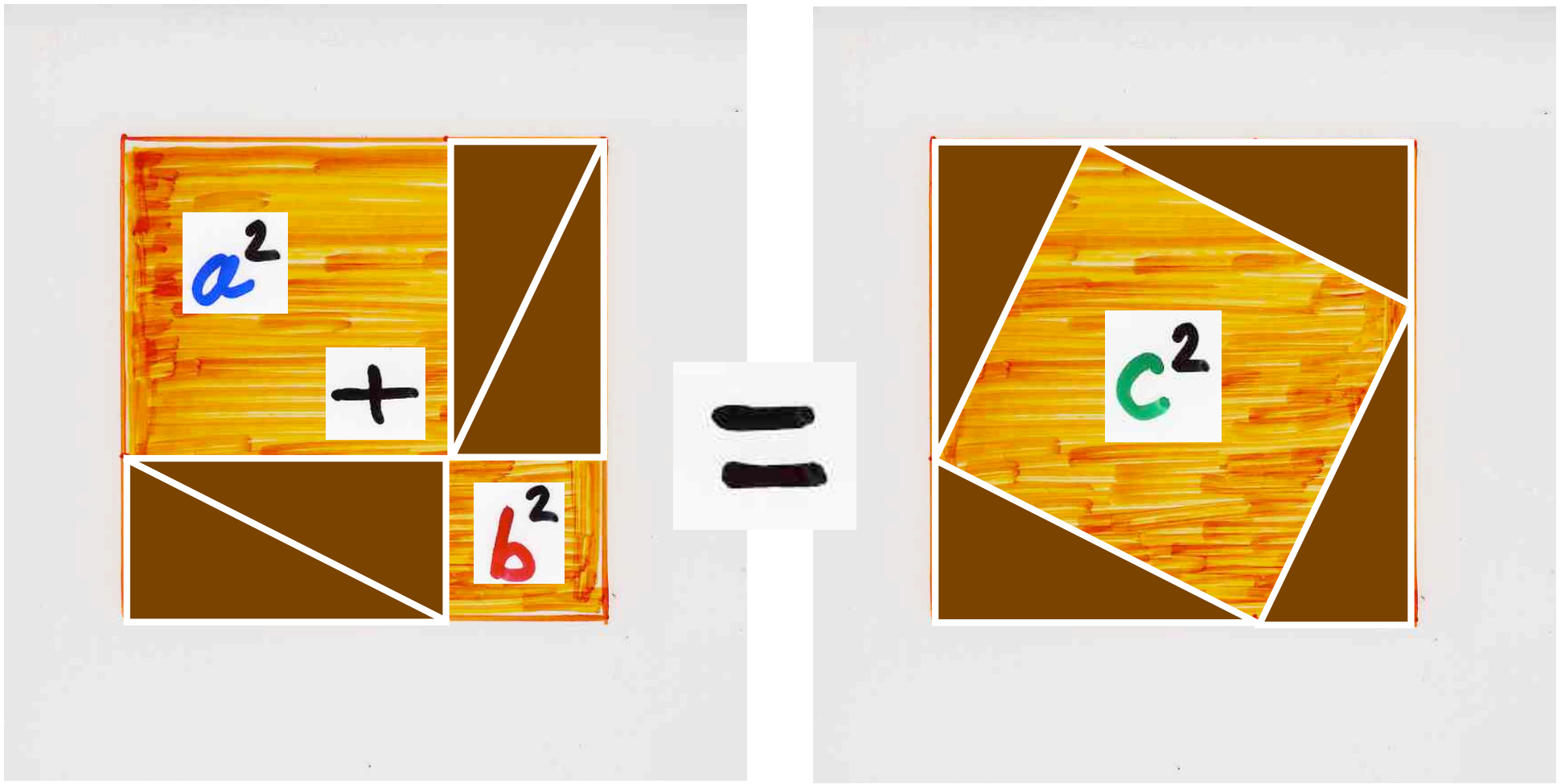
animation au violon










a^2
+
b^2
=
c^2

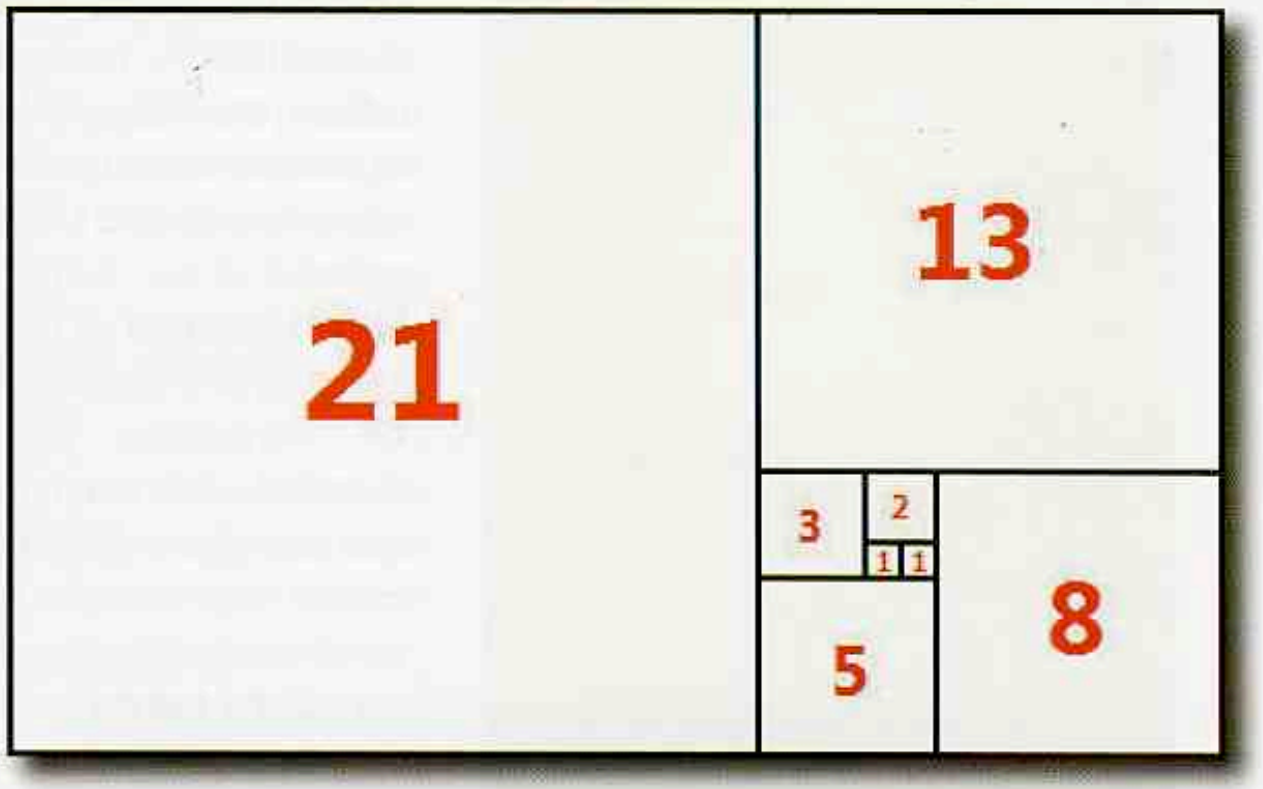
asymptotique

animation au violon

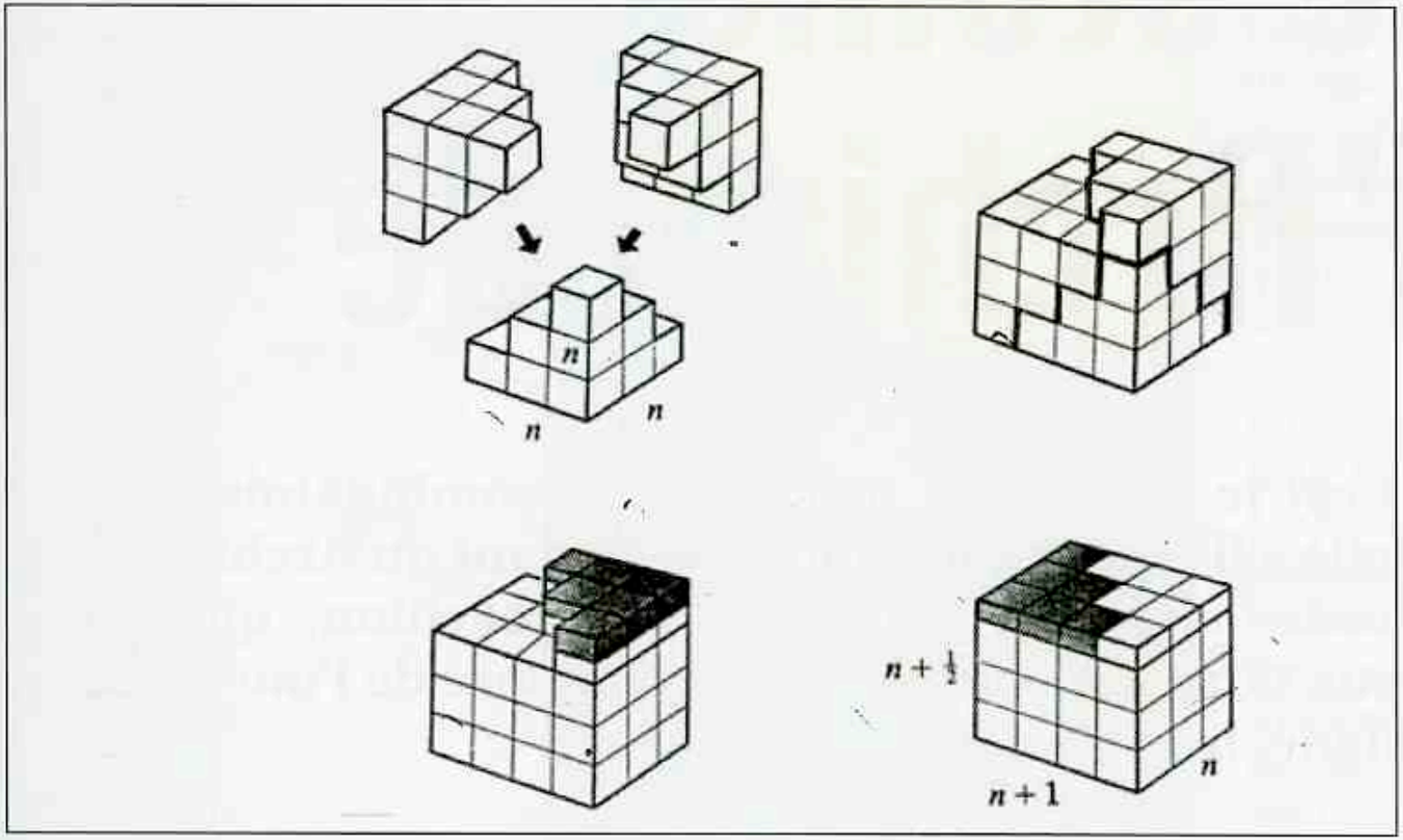
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \bullet\bullet\bullet\bullet = 1$$

des livres .....

$$F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n . F_{n+1}$$



$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{2} n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$



quelques formules ...

animation au violon

$$(1+t)^2 = 1+2t+t^2$$

$$(1+t)^3 = 1+3t+3t^2+t^3$$

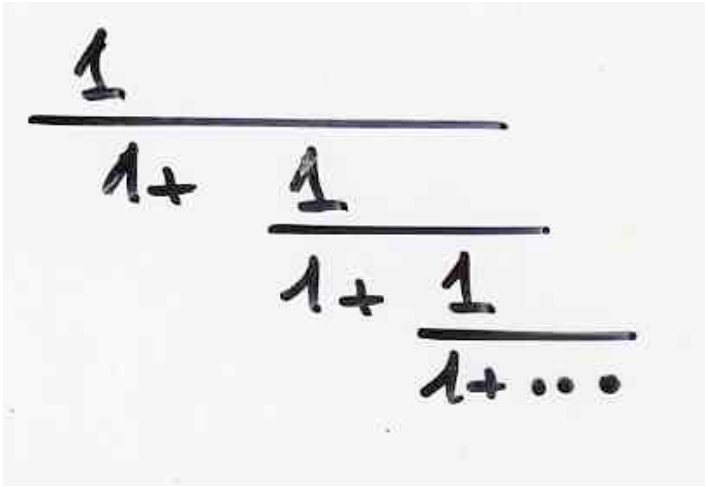
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$2(2n+1)C_n = (n+2)C_{n+1}$$

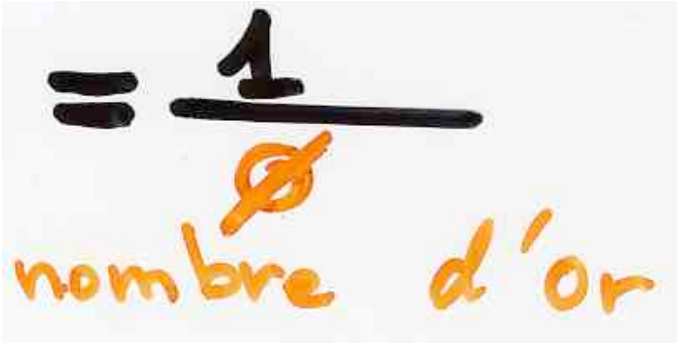
$$C_{n+1} = \sum_{0 \le i \le \lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} C_i \, 2^{2n-i}$$

$$d_n = n! \left(1 + \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{(-1)^i}{n!}\right)$$

$$\frac{d_n}{n!} \longrightarrow \frac{1}{e}$$



$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$



$$= \frac{1}{\phi}$$

nombre d'or

$$\int_0^\infty e^{-t}\tan(tu)\,dt = \cfrac{1}{1-\cfrac{1.2\,u^2}{1-\cfrac{2.3\,u^2}{1-\cfrac{3.4\,u^2}{\cfrac{\cdots}{1-\cfrac{k(k+1)u^2}{\cdots}}}}}}$$

Laplace transform

$$H_n(x) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \frac{n!}{2^k \, k! \, (n-2k)!} x^{n-2k}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\pi} \; n! \; \delta_{n,m}$$

Hermite

$$\sum_{n \geq 0} H_n(x) H(y) \frac{t^n}{n!} = (1-4t^2)^{-1/2} \exp\left[\frac{4xyt - 4(x^2+y^2)t^2}{1-4t^2}\right]$$

$$\tilde{b}_n^{\leq k} = \frac{1}{k} \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p \sin \alpha_p \prod_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\sin (i + \frac{1}{2}) \alpha_p}{\sin \frac{\alpha_p}{2}} \right)^{N_i} (1 + 2 \cos \alpha_p)^{n-1}$$

animals

circular strip

width k

$$\alpha_p = \frac{2p+1}{2k} \pi$$

(Hakim, Nadal, 1982)

$$\prod_{i \geq 1} (1 - q^i) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \left(q^{n(3n-1)/2} + q^{n(3n+1)/2} \right)$$

$$\sum_{m \geq 1} \frac{q^{m^2}}{\left[(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)\right]^2} = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1-q^i)}$$

Rogers - Ramanujan identities

$$R_I \qquad \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{i \equiv 1,4 \bmod 5} \frac{1}{(1-q^i)}$$

$$R_{II} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{i \equiv 2,3 \bmod 5} \frac{1}{(1-q^i)}$$

"La fraction continue" de Ramanujan

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+\cfrac{q^3}{\cfrac{\cdots}{1+\cfrac{q^k}{\cdots}}}}}} = \frac{\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}}{\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}}$$

$$R(q) = \prod_{n \geq 0} \frac{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}{(1-q^{5n+3})(1-q^{5n+2})} = \frac{R_{II}}{R_I}$$

$$R(q) = \prod_{n \geq 0} \frac{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}{(1-q^{5n+3})(1-q^{5n+2})} = \frac{R_{II}}{R_I}$$

$$t = -q\left[R(q)\right]^5$$

$$R(q) = \prod_{n\geq 0} \frac{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}{(1-q^{5n+3})(1-q^{5n+2})} = \frac{R_{II}}{R_I}$$

$$t = -q\left[R(q)\right]^5$$

$$Y(q) = \prod_{n\geq 0} \frac{(1-q^{6n+2})(1-q^{6n+3})^2(1-q^{6n+4})(1-q^{5n+1})^2(1-q^{5n+4})^2(1-q^{5n})^2}{(1-q^{6n+1})(1-q^{6n+5})(1-q^{6n})^2(1-q^{5n+2})^3(1-q^{5n+3})^3}$$

$$R(q) = \prod_{n\geq 0} \frac{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}{(1-q^{5n+3})(1-q^{5n+2})} = \frac{R_{II}}{R_I}$$

$$t = -q\left[R(q)\right]^5$$

$$Y(q) = \prod_{n\geq 0} \frac{(1-q^{6n+2})(1-q^{6n+3})^2(1-q^{6n+4})(1-q^{5n+1})^2(1-q^{5n+4})^2(1-q^{5n})^2}{(1-q^{6n+1})(1-q^{6n+5})\,(1-q^{6n})^2\;\;(1-q^{5n+2})^3(1-q^{5n+3})^3}$$

$$Z(t) = Y(q(t))$$

$$y\left(1+14t+97t^2+415t^3+1180t^4+2321t^5+3247t^6+3300t^7+2475t^8+1375t^9+550t^{10}+143t^{11}+18t^{12}\right)+$$

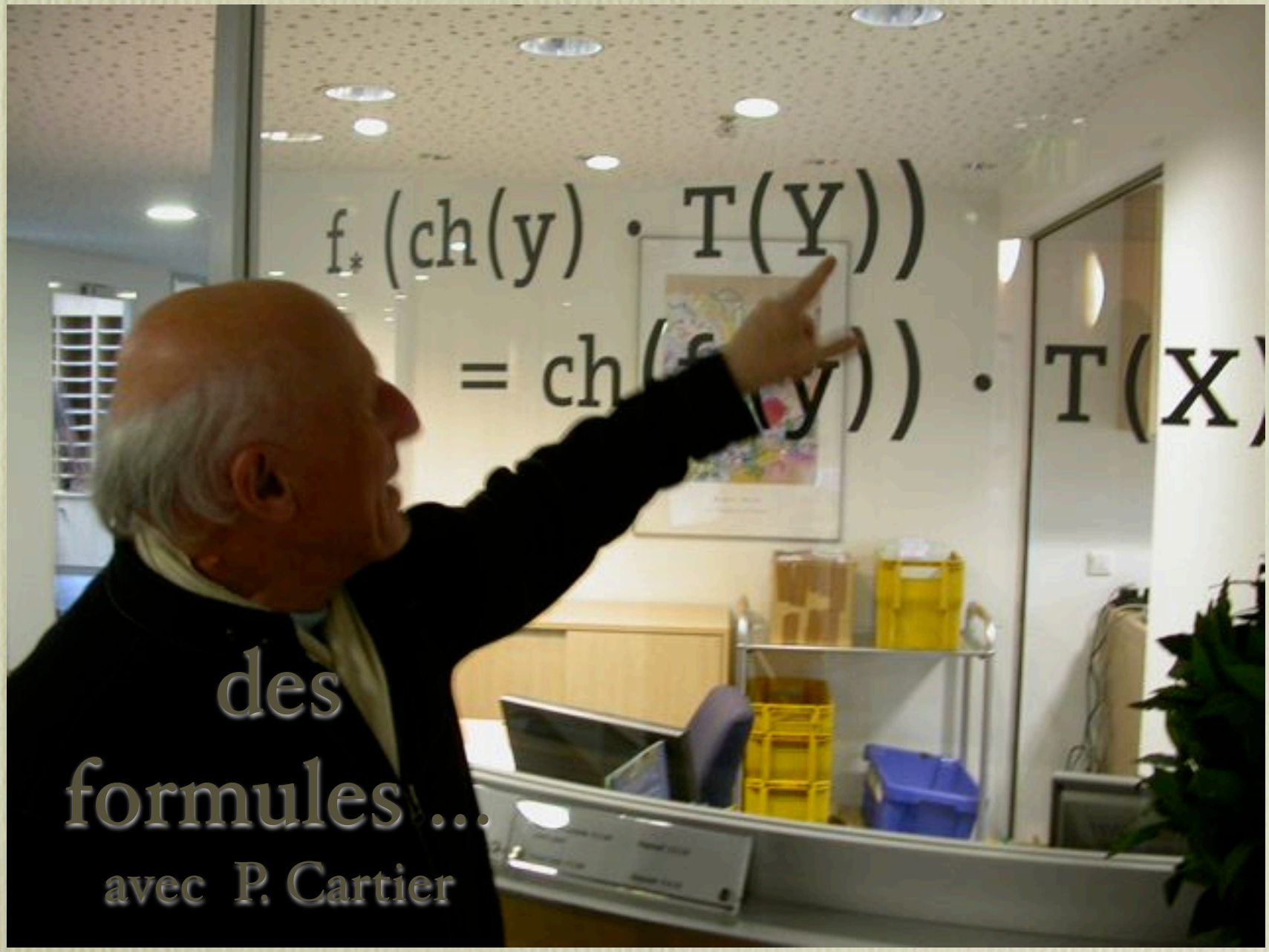
$$y^2\left(1+17t+83t^2+601t^3+1647t^4+4606t^5+7809t^6+710t^7+124t^8-608t^9-440t^{10}-92t^{11}-36t^{12}\right)+$$

$$y^3\left(3+50t+381t^2+1715t^3+5040t^4+10130t^5+14062t^6+13002t^7+6930t^8+715t^9-1595t^{10}-488t^{11}-198t^{12}\right)+$$

$$y^4\left(1+17t+131t^2+595t^3+1765t^4+3574t^5+4939t^6+4356t^7+1815t^8-605t^9-1210t^{10}-616t^{11}-126t^{12}\right)$$

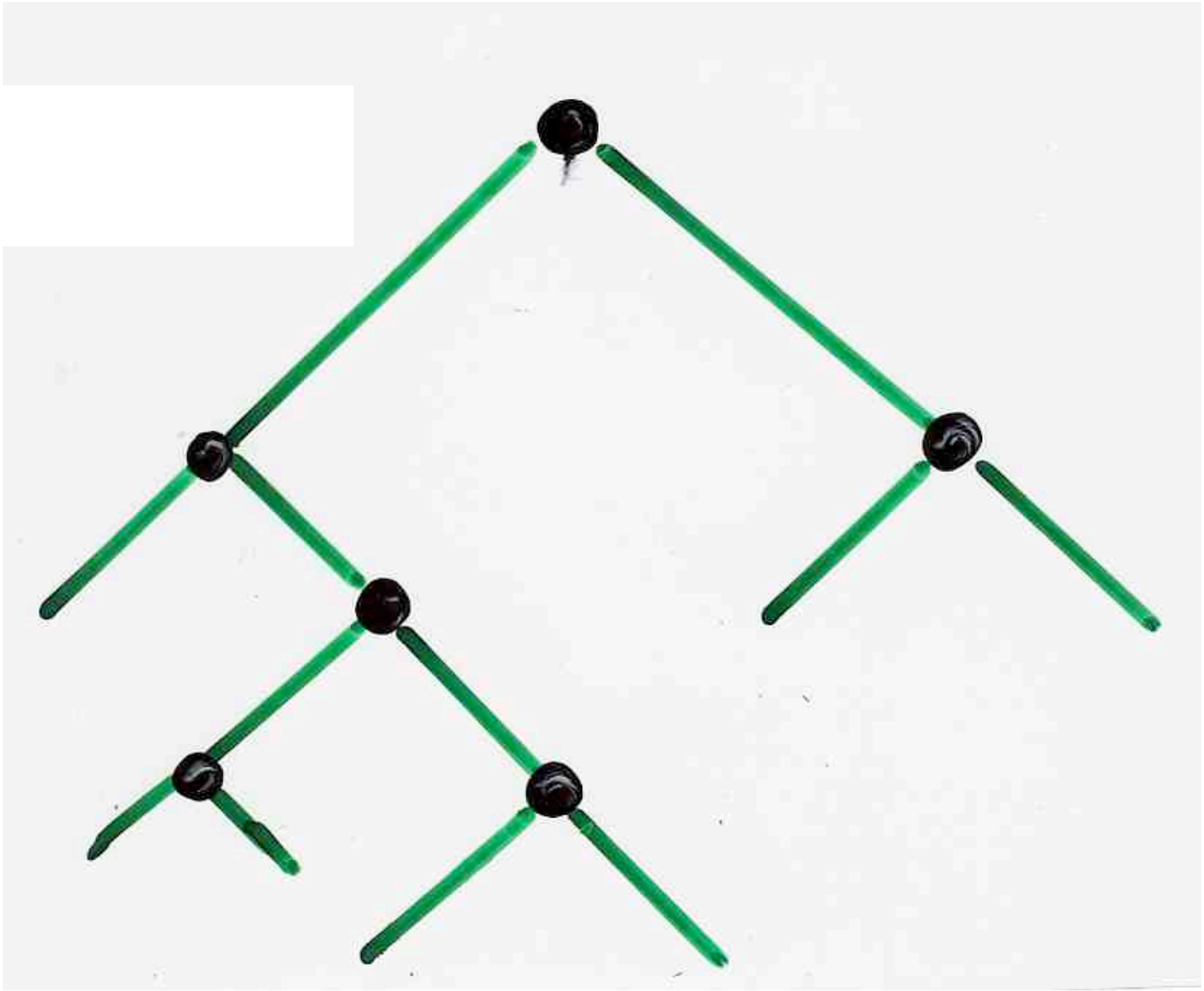
$$=\left(t+11t^2+55t^{33}+165t^4+330t^5+462t^6+462t^7+330t^8+165t^9+55t^{10}+11t^{11}+t^{12}\right)$$

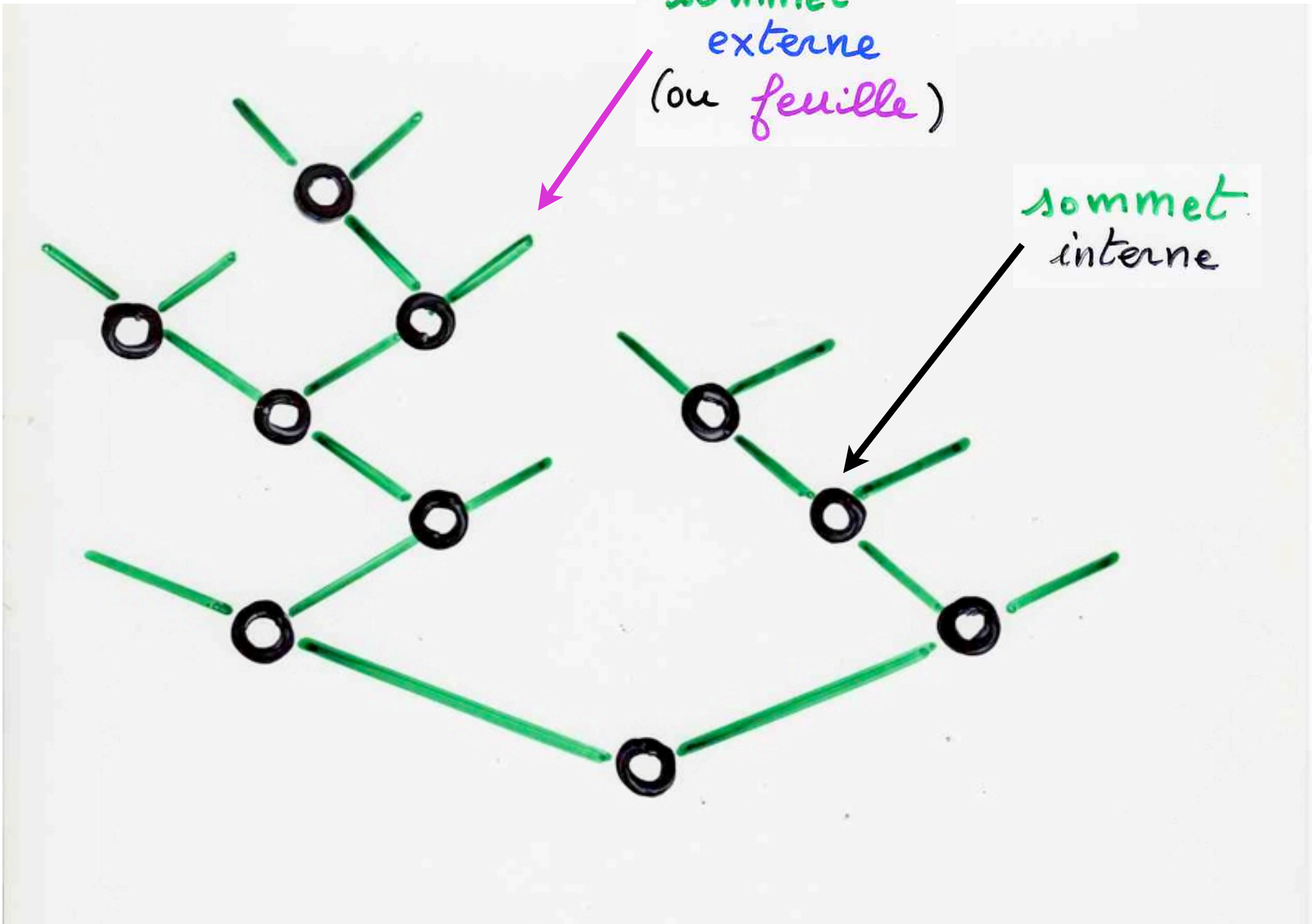
$$a_{n+1} = 3^n$$


$f_*(ch(y) \cdot T(Y))$
$= ch(f_*(y)) \cdot T(X)$
des
formules ...
avec P. Cartier

arbres binaires

les nombres de Catalan




sommet
externe
(ou feuille)
sommet
interne

C_n = nombre

d'arbres binaires

ayant n

sommets internes

(et donc $n+1$ feuilles)

nombre de Catalan

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$2(2n+1)C_n = (n+2)C_{n+1}$$

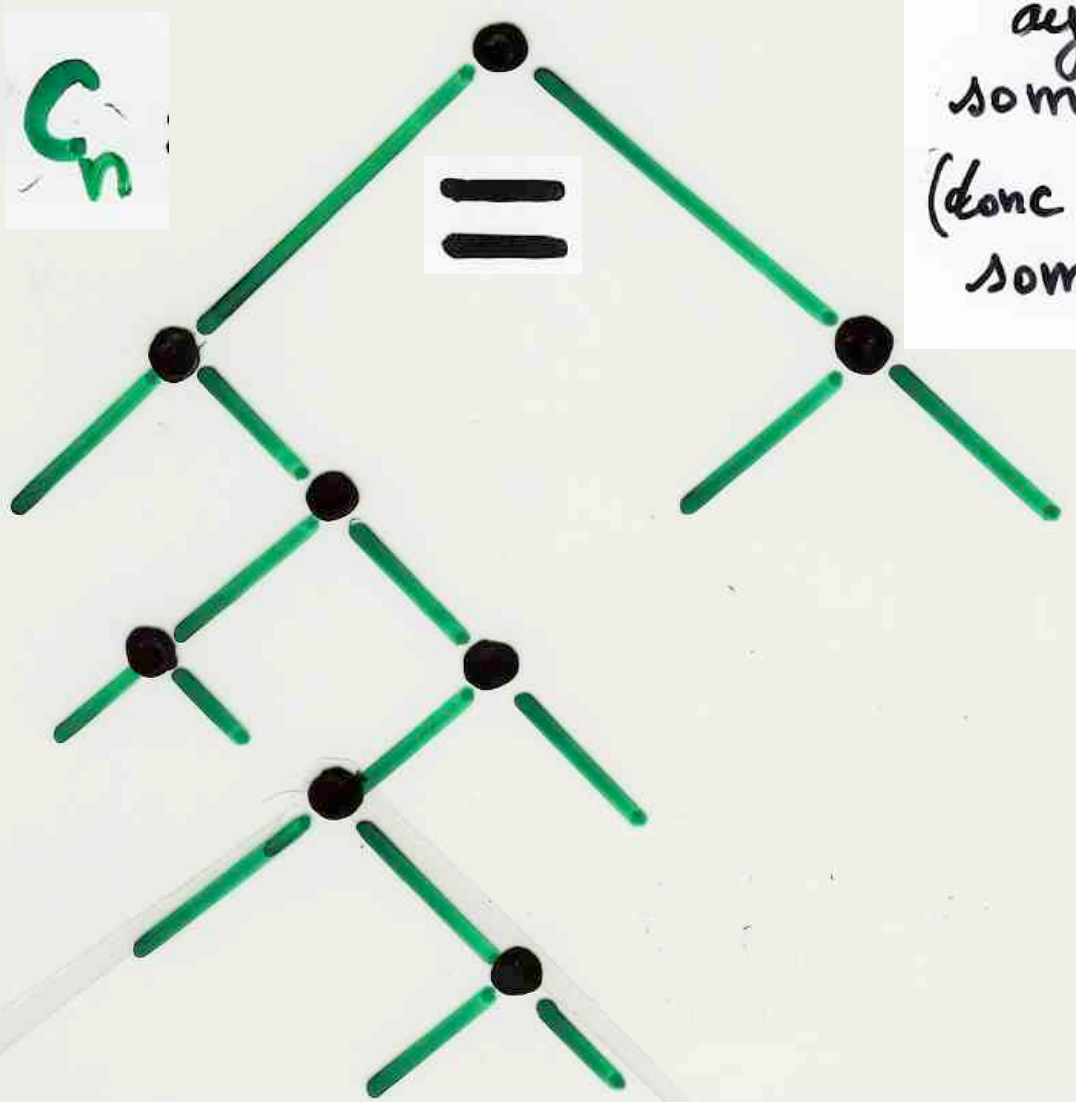
une preuve sans mots

$$2(2n+1)C_n = (n+2)C_{n+1}$$

animation au violon

choix d'un arbre

C_n =



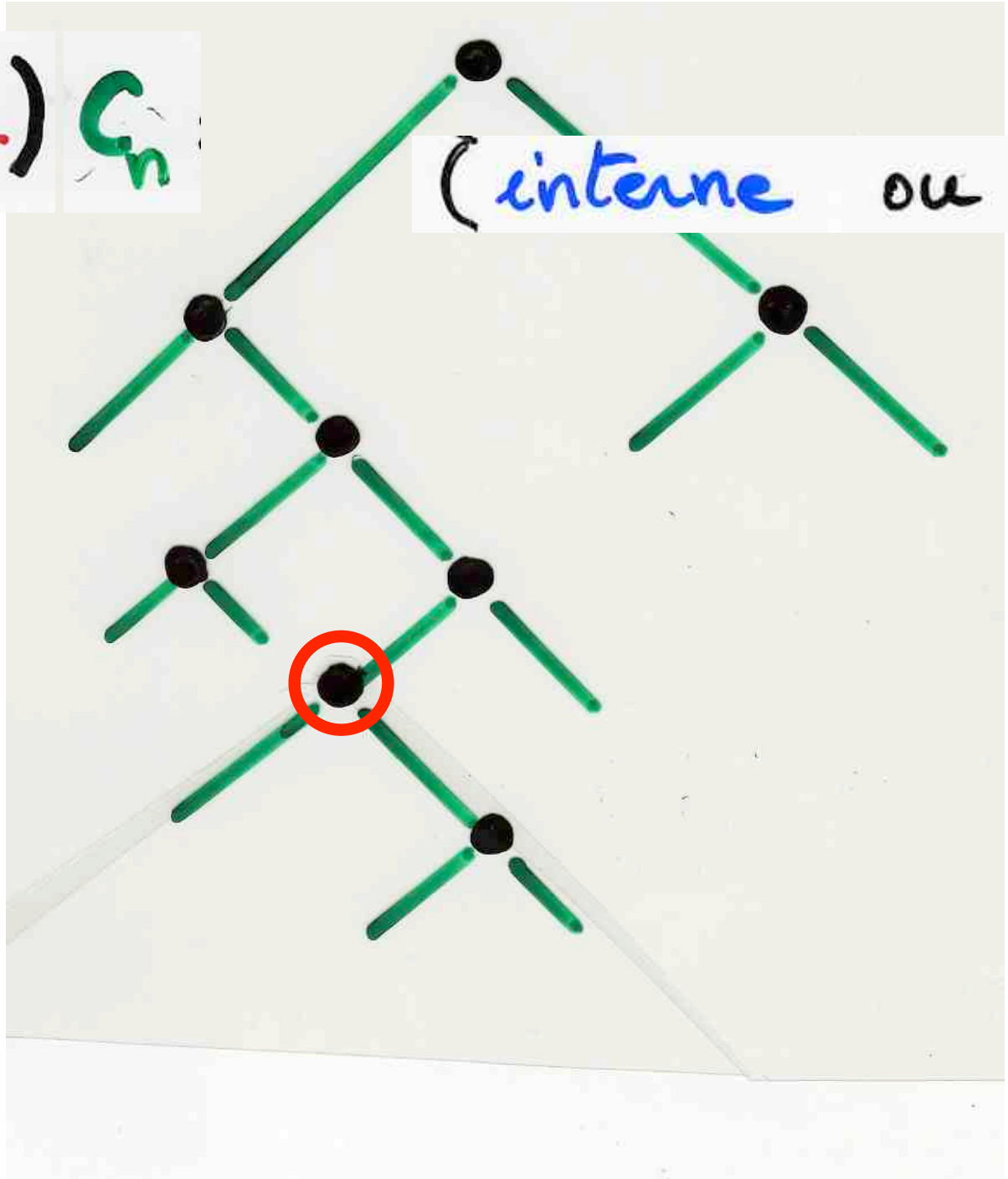
ayant n sommets internes

(donc $n+1$ sommets externes

choix d'un sommet

$(2n+1)\,C_n$

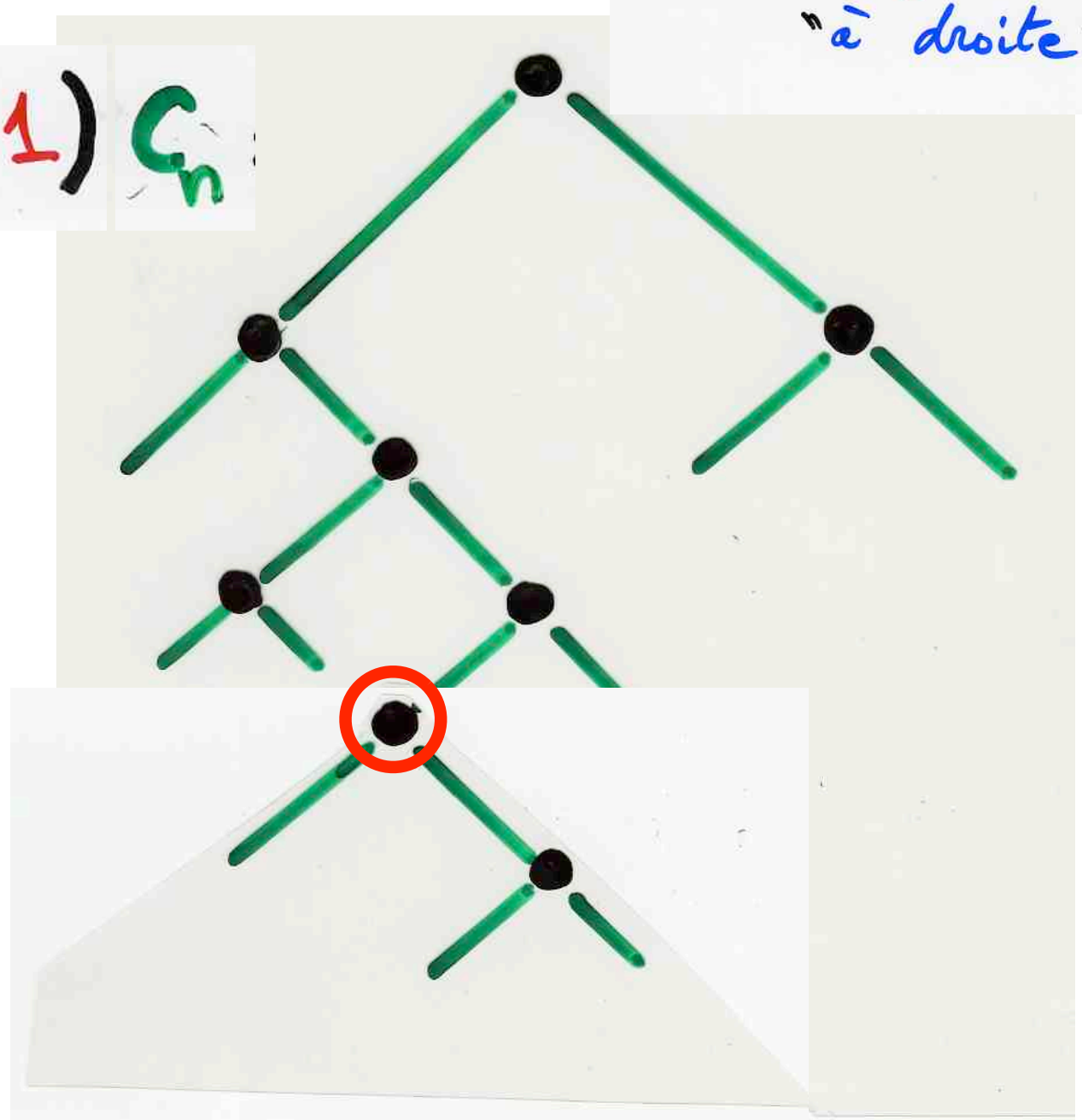
(interne ou externe)



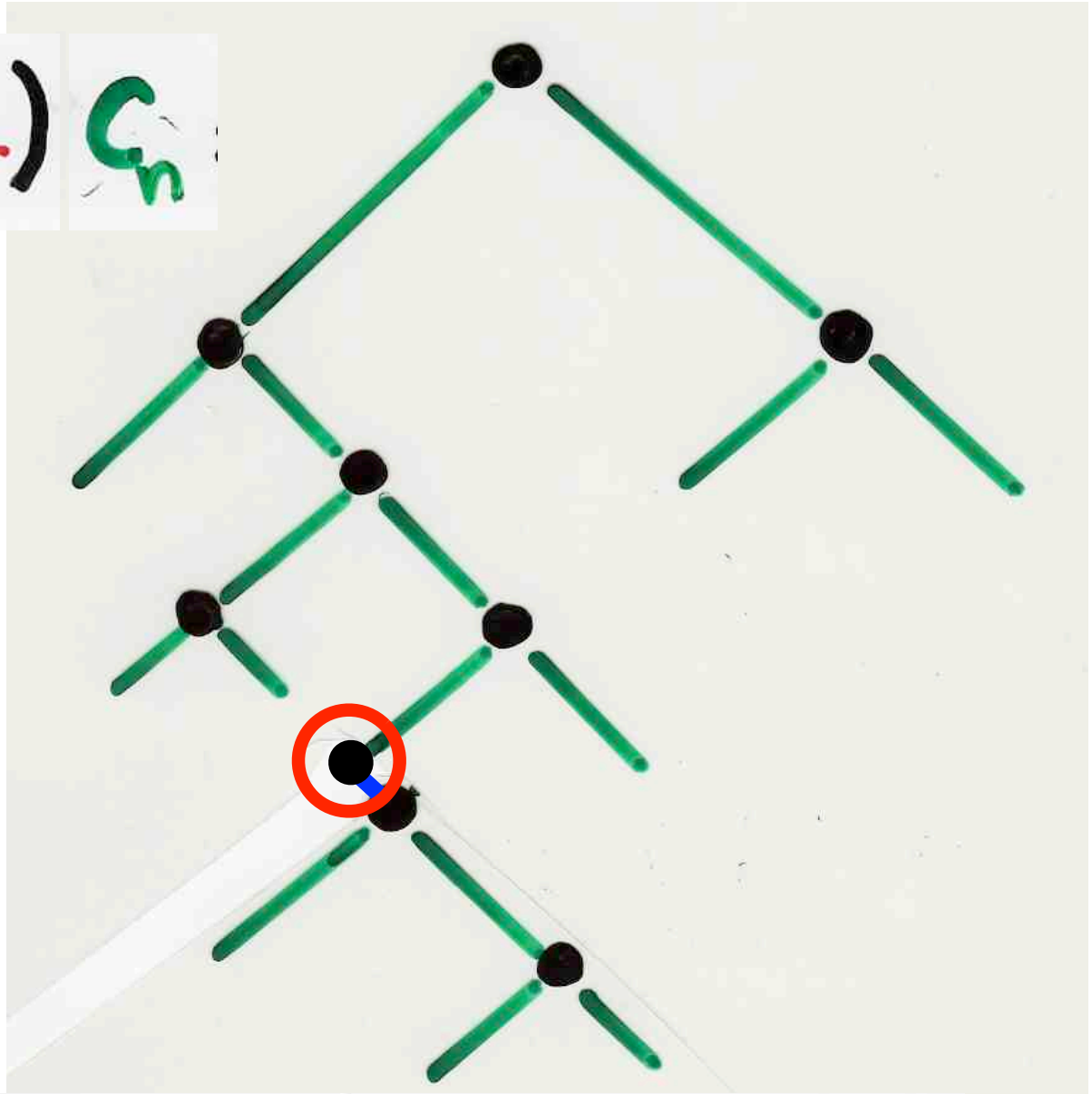
choix "à gauche"

"à droite"

$2(2n+1)C_n$

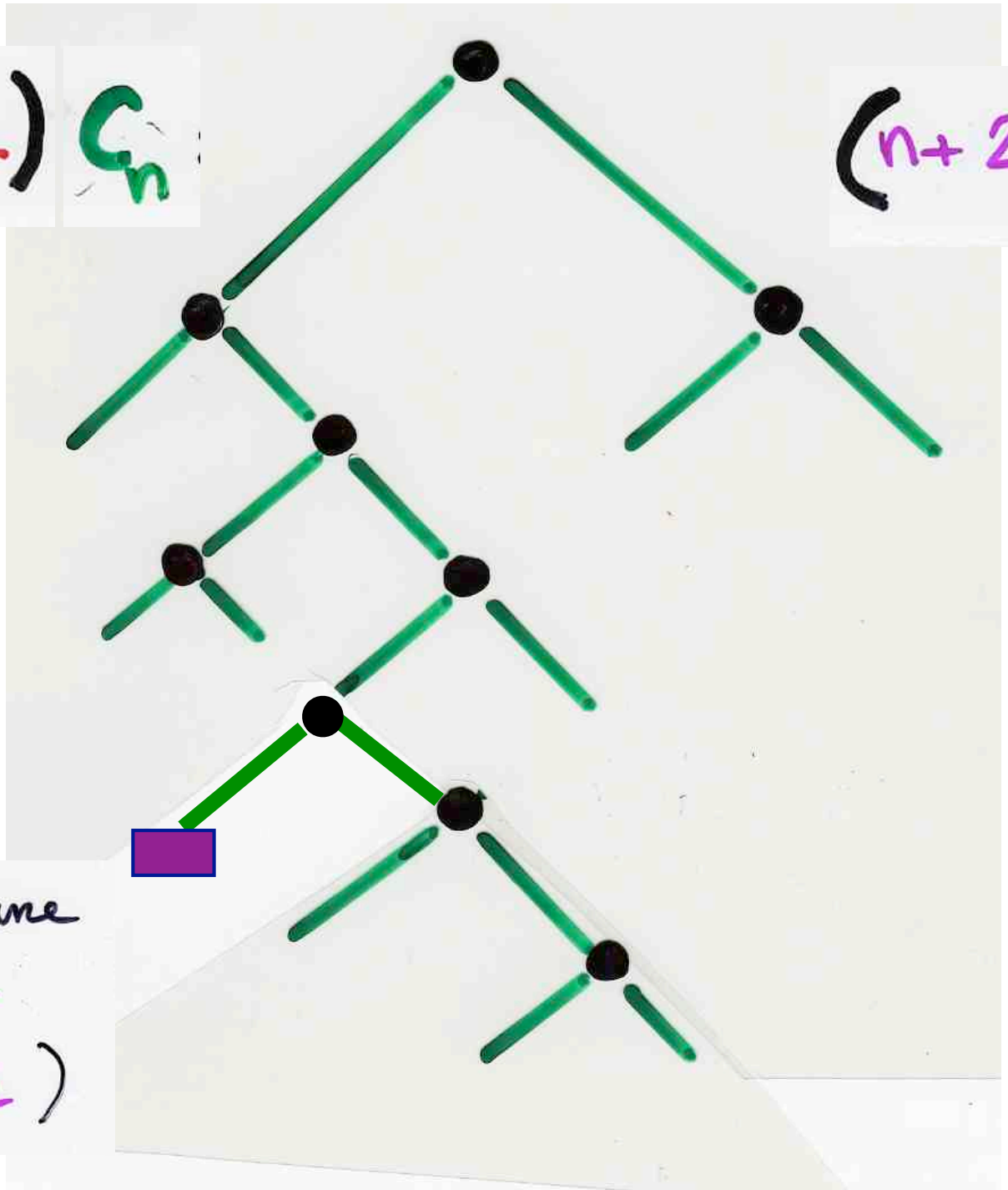


$2(2n+1)C_n$



glissement à droite \

$2(2n+1)C_n$



$(n+2)C_{n+1}$

ajout d'une feuille (= sommet externe)

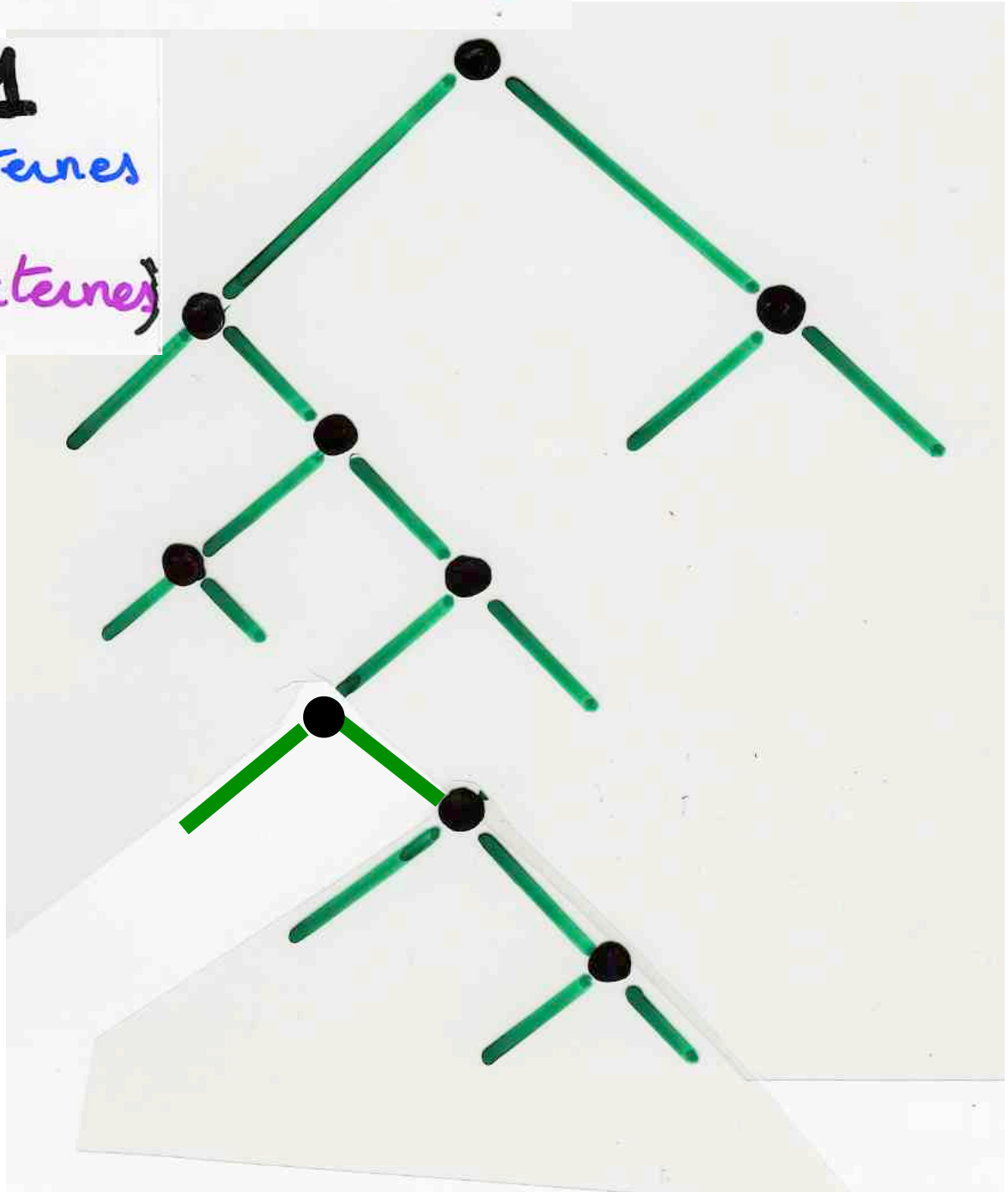
bijection réciproque

$$2(2n+1)C_n = (n+2)C_{n+1}$$

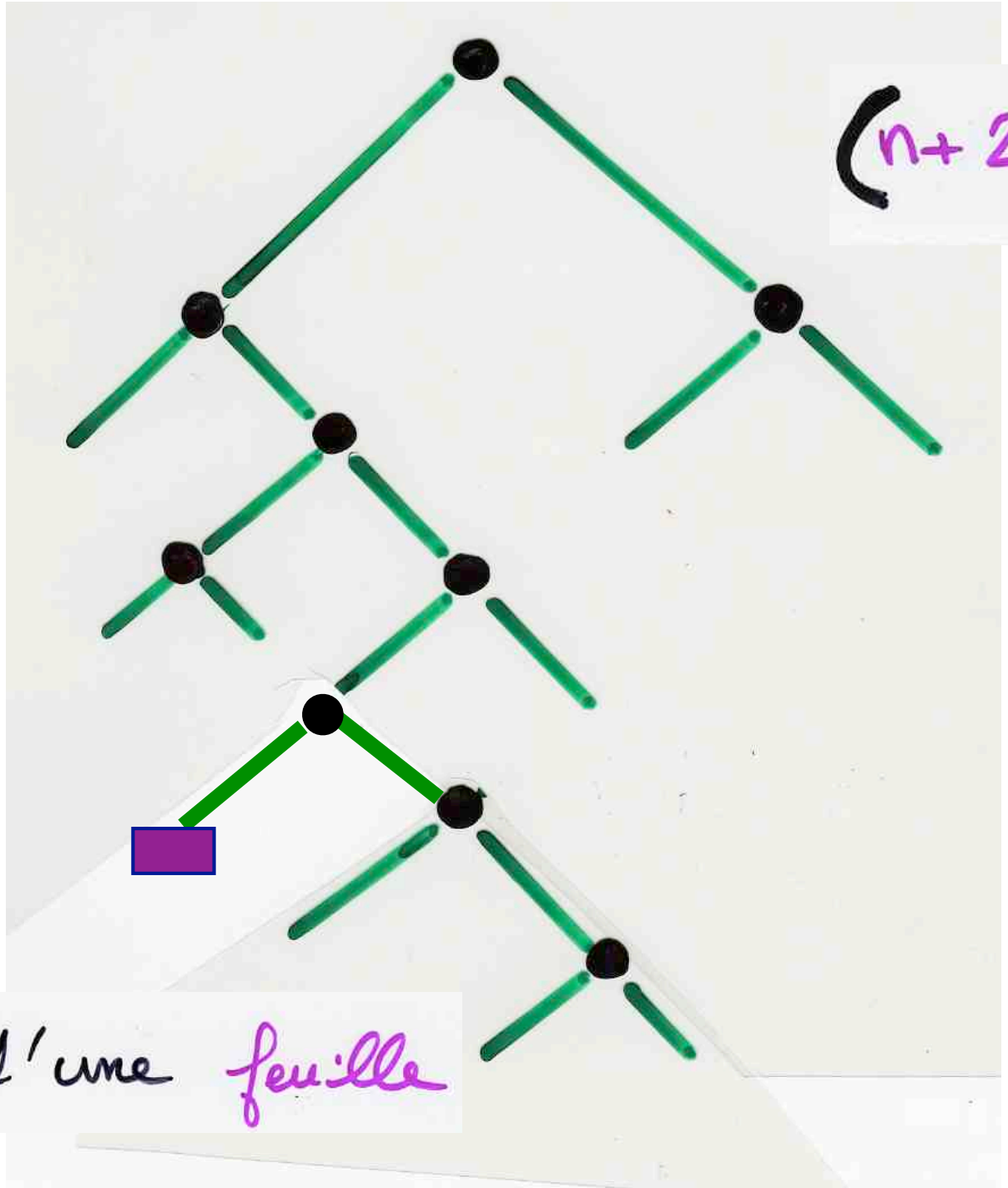
choix d'un arbre

ayant $n+1$ sommets internes

(donc $n+2$ sommets externes)

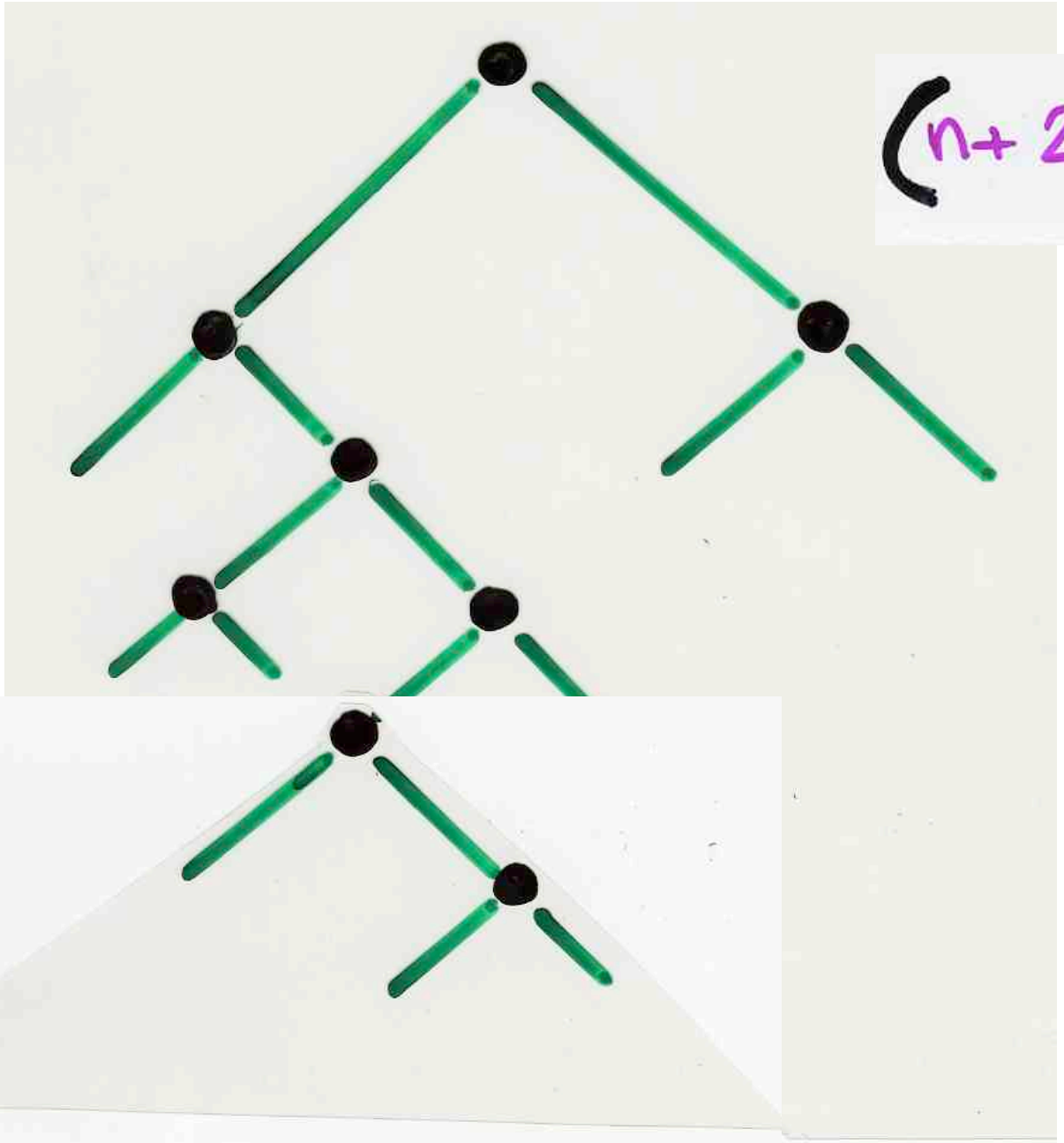


C_{n+1}



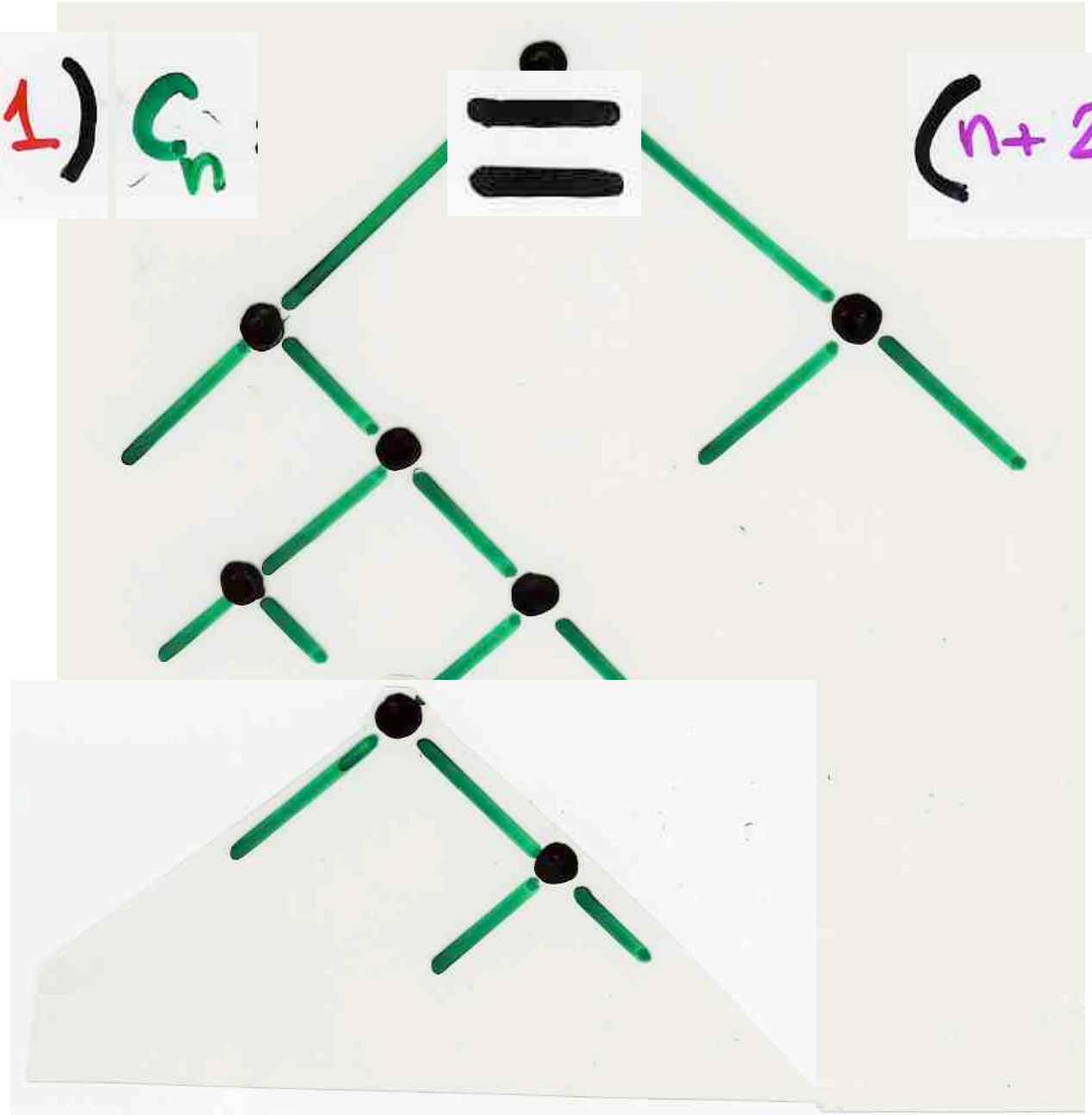
$\binom{n+2}{n+1} C_{n+1}$

choix d'une feuille



$\binom{n+2}{n+1} C_{n+1}$

$2(2n+1)C_n = (n+2)C_{n+1}$



Une lettre "oubliée" d'Euler à Christian Goldbach ....

Berlin, 4 Septembre 1751

EULER

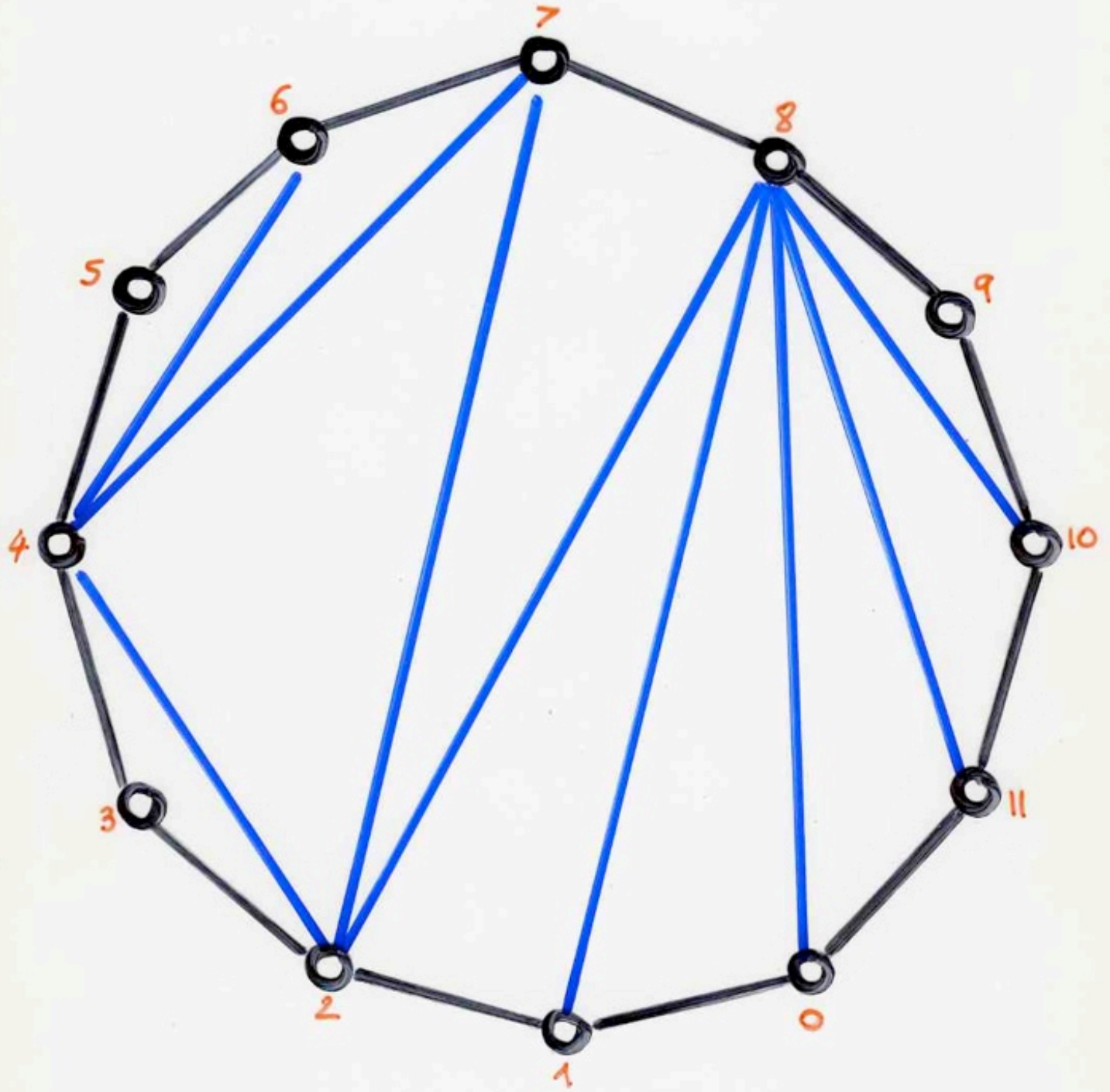
Euler 300

300. Geburtstag

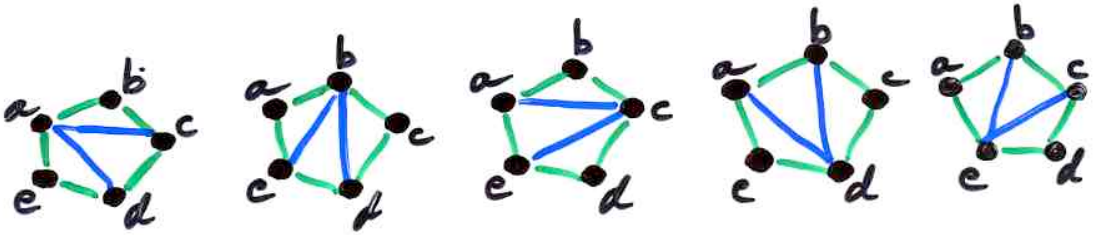
300ème anniversaire

300° anniversario

300th anniversary



triangulation d'un polygone régulier

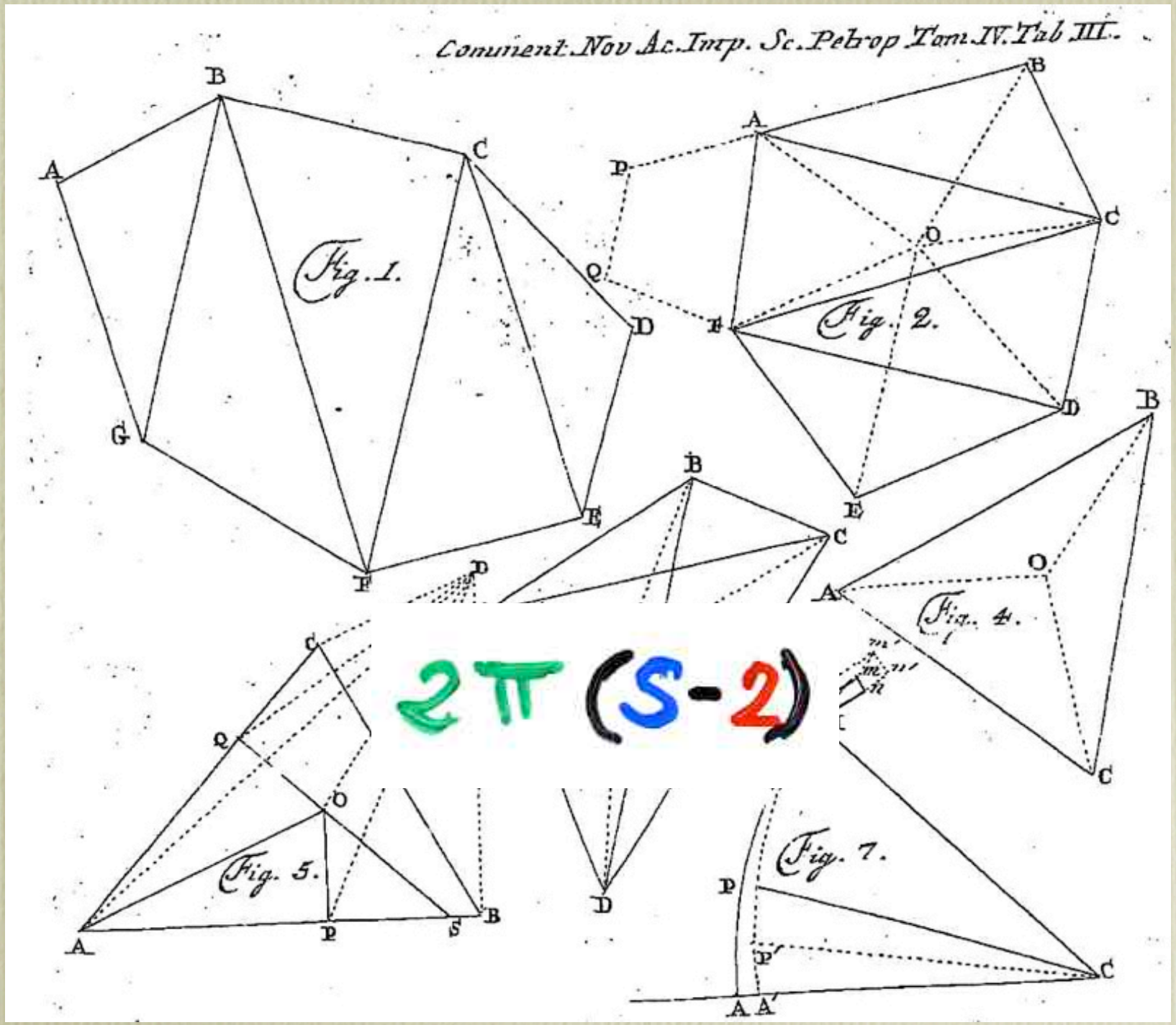


$$1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, \ldots$$

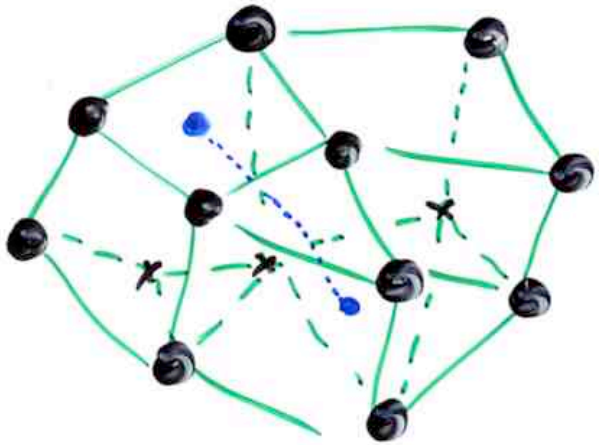
$$x = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot (4n-10)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (n-1)} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$$

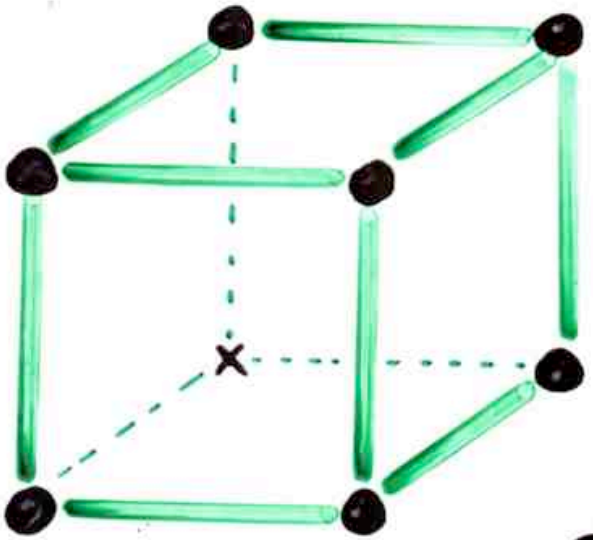
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$$


Comment. Nov. Ac. Imp. Sc. Petrop. Tom. IV. Tab. III.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 7.
2π(S-2)

Polyèdre convexe





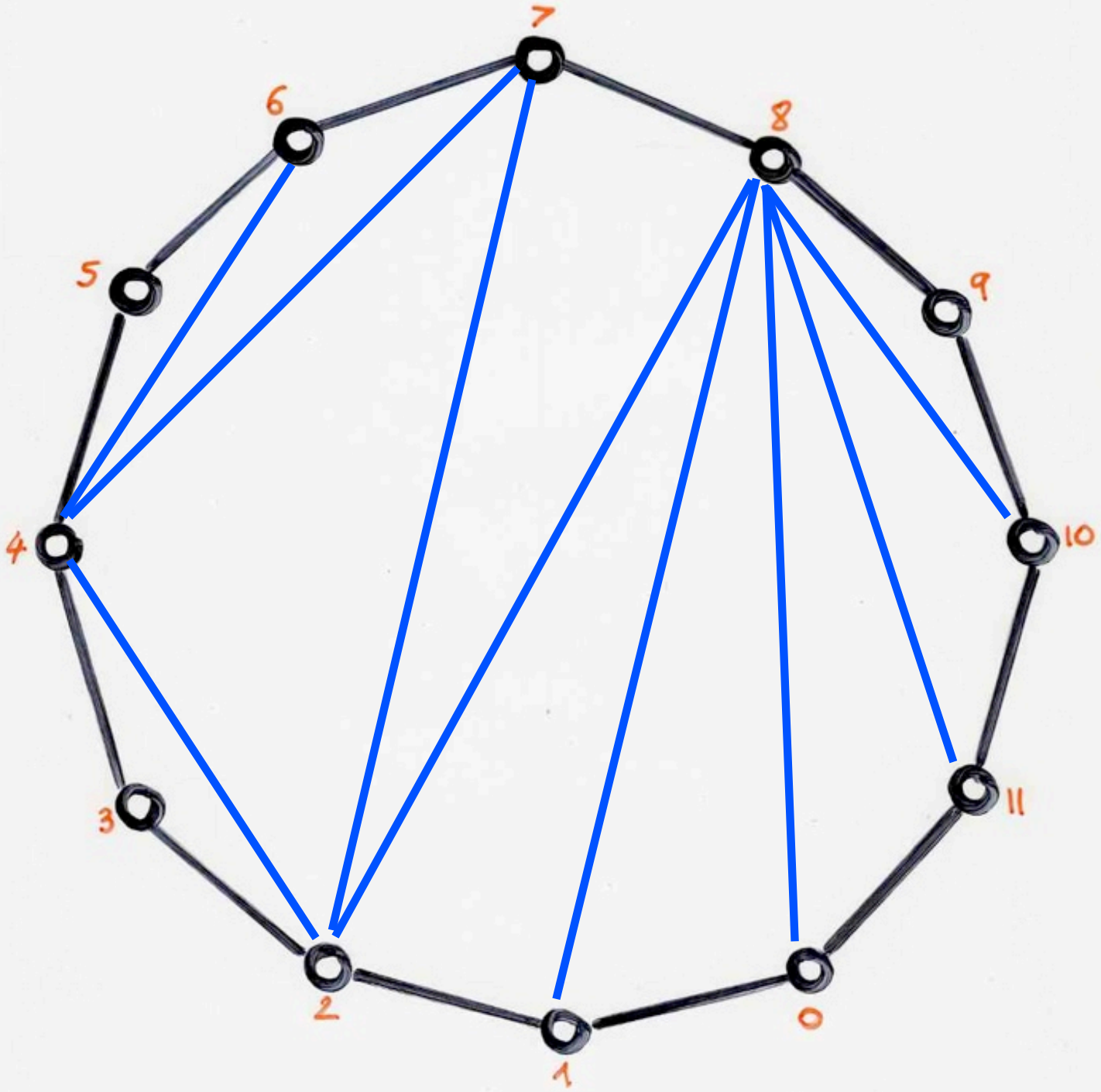
$$S - A + F =$$

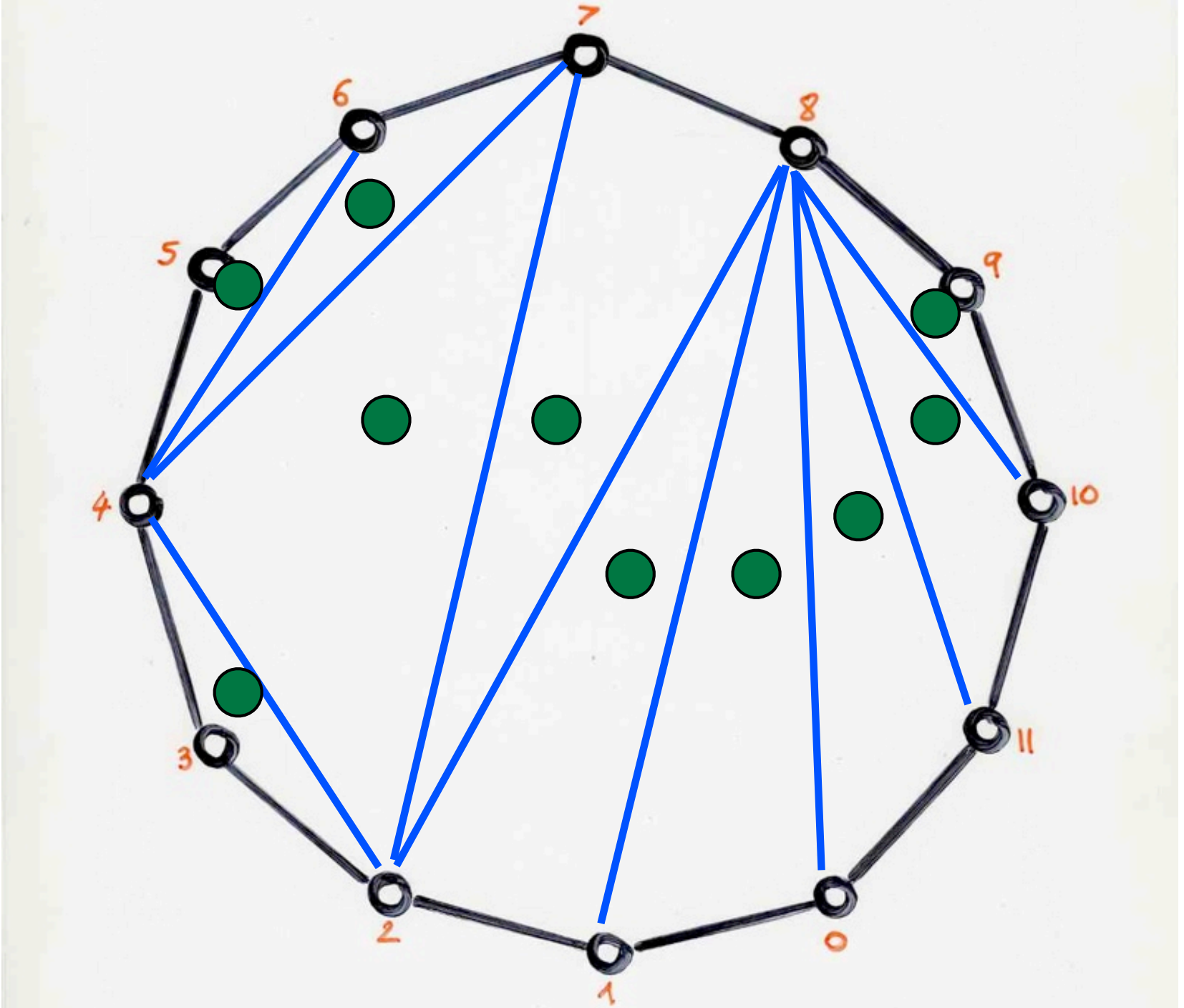
$$8 - 12 + 6 = 2$$

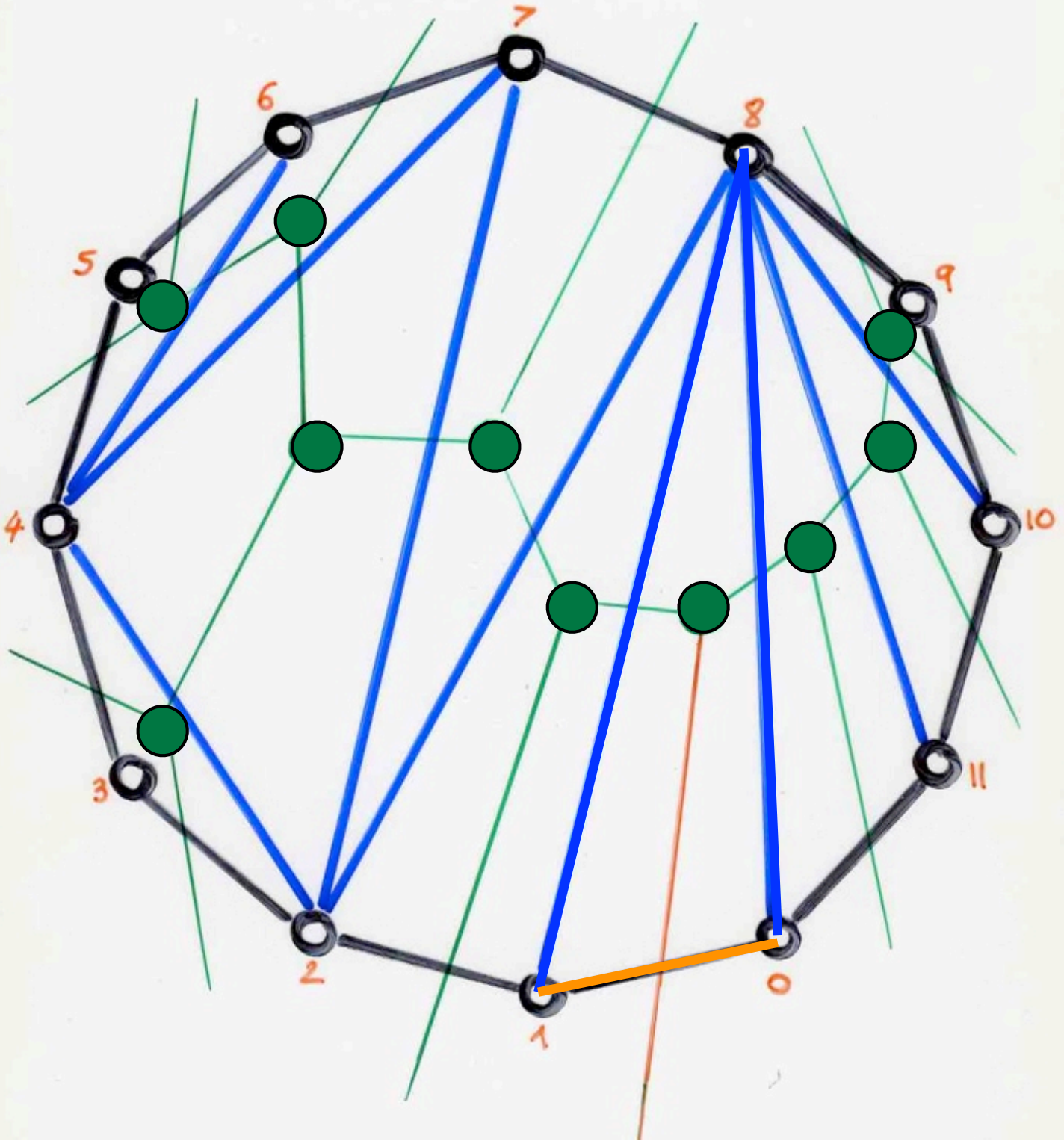
des triangulations aux arbres binaires

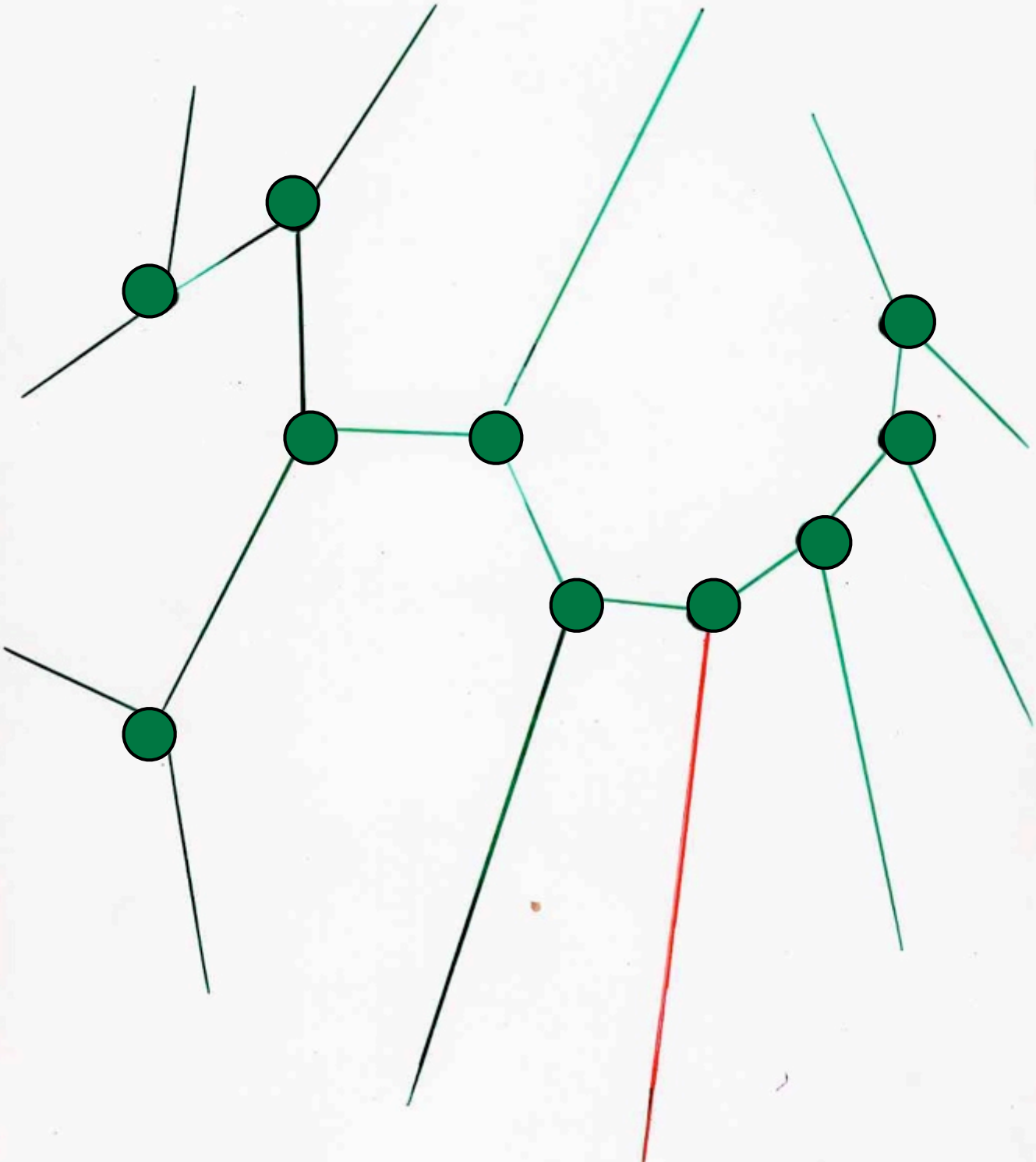
animation au violon

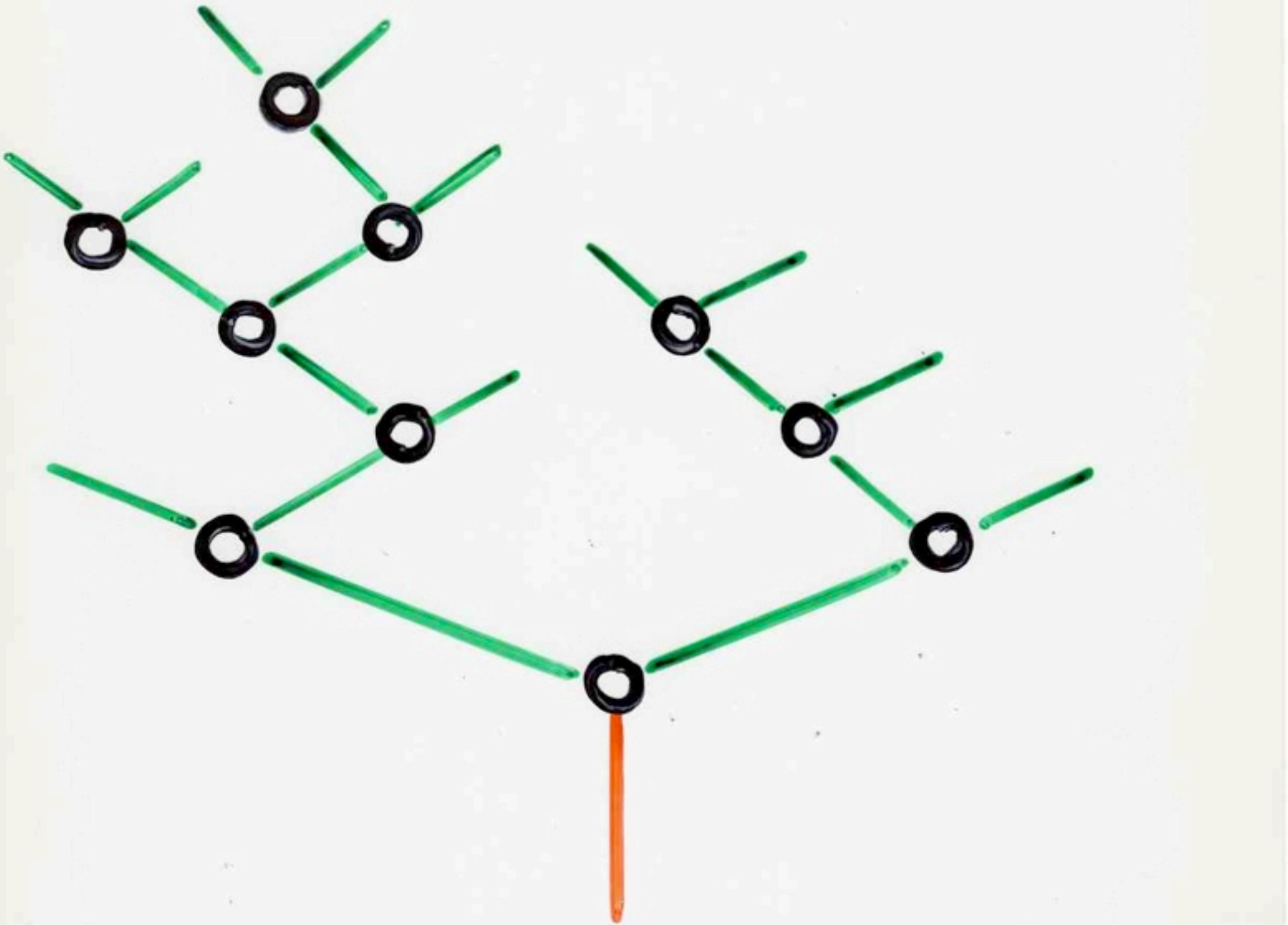
voir la vidéo sur le site: www.xavierviennot.org

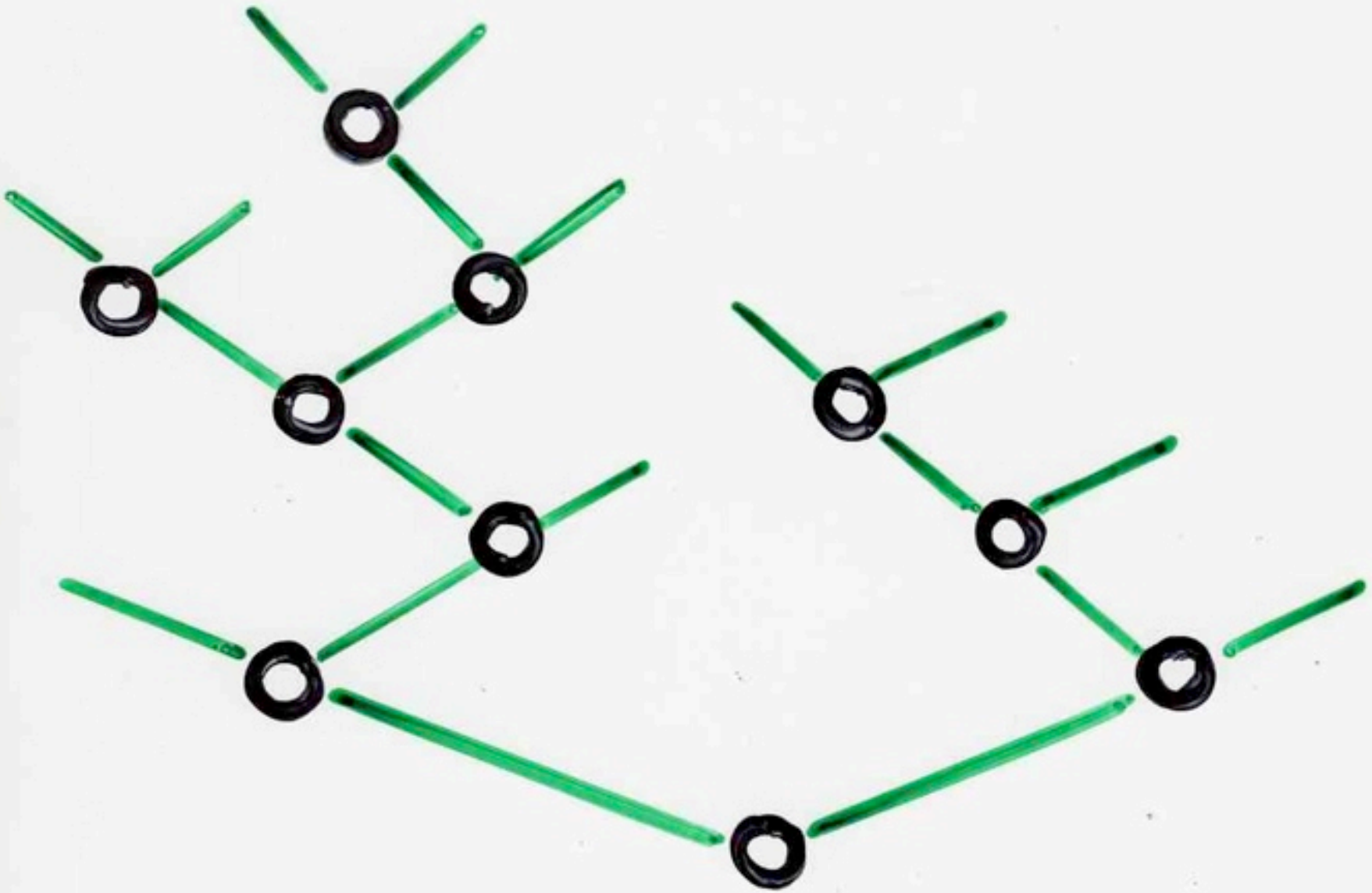

7
6
8
5
9
4
10
3
11
2
0
1


7
6
8
5
9
4
10
3
11
2
0
1


7
6
8
5
9
4
10
3
11
2
0
1







Vous venez de voir une bijection combinatoire

Une triangulation d'un polygone régulier à 10+2 côtés est devenue un arbre binaire ayant 10 branchements (ou "sommets internes")

Inversement, la donnée de cet arbre binaire permet de retrouver la triangulation de départ.

Cette construction permet de démontrer que le nombre de triangulations d'un polygone régulier à $n+2$ côtés est le même que le nombre d'arbres binaires ayant n branchements.

non seulement démontrer ...
mais plus.. comprendre pourquoi

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. VII.

pro Annis MDCCLVIII. et MDCCLIX.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXI.

merorum exponit, ac rigoroſe demonſtrat, dum docet, quomodo pro quouis polygono reſolutionum numerus, ex cognita reſolutione polygonorum ſimpliciorum, quae paucioribus conſtant lateribus, colligi debeat. Hac ratione, ſi a ſimpliciſſimis incipiamus, hanc inueſtigationem continuo ad polygona plurium laterum extendere licet, ſicque Ill. Auctor ſub finem tabellam adiecit, in qua iſtiusmodi reſolutiones ad polygona 20 laterum vsque exhibet. Liceat autem nobis, a ſummo quodam Geometra, qui eandem hanc tabulam calculo ſubiecit, admonitis, obſeruare, hanc tabulam, ob quendam calculi errorem, tantum vsque ad polygona 15 laterum eſſe iuſtam, quippe pro hoc polygono reſolutionum numerus non eſt 751900, vt tabella habet, ſed 742900, ſequentes quoque numeri, dum forte nouus error irrepſit, primo ad 17 vsque latera nimis ſunt magni, deinde vero nimis parui, dum pro 20 lateribus reſolutionum numerus eſt 477638700. Facilius haec apparent, ſi ex lege primum obſeruata, qua quilibet numerus ex omnibus praecedentibus colligitur, alia ad computum facilior eliciatur, cuius ope quilibet numerus ex ſolo praecedente definiatur. Ita ſi pro polygono n laterum numerus reſolutionum ſit P, pro polygono ſequente $n+1$ laterum numerus reſolutionum erit $\frac{4n-6}{n}$ P. Quin etiam hinc, ſine conſideratione praecedentium, ſtatim indefinite pro polygono n laterum numerus reſolutionum ita per factores exprimitur, vt ſit:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{10}{4}\cdot\frac{14}{5}\cdot\frac{18}{6}\cdot\frac{22}{7}\cdot\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \frac{4n-10}{n-1}$$

vbi numeratores quaternario, denominatores vero vnitate creſcunt. Hinc ſequentem nouam tabulam, benevole

vole nobiscum communicatam, adiungere e re viſum eſt, quod Ill. Auctori huius ſchediasmatis non diſpliciturum eſſe ſperamus.

Num. laterum	numerus reſolutionum.	num. laterum	numerus reſolutionum.
III	1	XV	742900
IV	2	XVI	2674440
V	5	XVII	9694845
VI	14	XVIII	35357670
VII	42	XIX	129644790
VIII	132	XX	477638700
IX	429	XXI	1767263190
X	1430	XXII	6564120420
XI	4862	XXIII	24466267020
XII	16796	XXIV	91482563640
XIII	58786	XXV	343059613650.
XIV	208012		

VII.

Methodus ſimplex et vniuerſalis omnes omnium aequationum radices detegendi.

$$2(2n+1)C_n = (n+2)C_{n+1}$$

Complures iam a Geometris excogitatae ſunt methodi aequationum algebraicarum radices, vel accurate, vel proxime ſaltem, determinandi: omnes autem fere poſtulant, vt valores radicum, quae quaeruntur,

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Sur le nombre de manières de décomposer un polygone en triangles au moyen de diagonales ;

PAR M. OLINDE RODRIGUES.

En désignant ce nombre par P_n pour un polygone de n côtés, on a

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n,$$

formule que M. Lamé a démontrée dans le dernier cahier de ce Journal, et qui peut être établie plus directement comme il suit.

des triangles qui entrent dans chaque figure de décom-
polygone de n côtés, est $n-2$.

roites, diagonales ou côtés, qui joignent deux à deux
de chacune de ces figures de décomposition est $2n-3$.
tal de ces droites pour les P_n figures sera donc $(2n-3)P_n$;
cune de ces droites joint deux sommets, on comprend
at que $\frac{4n-6}{n} P_n$ représente le nombre total des droites
P_n figures, vues ensemble, aboutissent à un sommet
olygone donné.

plus évident que chacune de ces droites, dont le
$\frac{4n-6}{n} P_n$, se trouve répétée autant de fois dans les
es ensemble qu'il y a de décompositions possibles
donné, *rapportées* à cette droite, côté ou diago-
te qu'on peut dire encore que $\frac{4n-6}{n} P_n$ exprime le
des décompositions possibles d'un polygone de n côtés,
sivement par rapport à l'une et à l'autre des $n-1$
un sommet désigné, vont joindre les autres sommets

insi qu'une décomposition s'opère *par rapport* à un côté
onale donnée, lorsque ce côté ou cette diagonale fait

Solution nouvelle de cette question : *Un polygone étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales ?*

PAR E. CATALAN. (*).

Soit ABCD...XYZA, un polygone convexe de $n+1$ côtés, et soit désigné par P_{n+1} le nombre total des décompositions de ce polygone.

...ions, il y en a qui renferment le triangle ABC :

...nent le triangle BCD : elles sont toutes dis-
..., et leur nombre est pareillement P_n.
... nous devons ajouter :
...ns du polygone de n côtés CEF...ZABC,
...pas le triangle ABC; je désigne leur nombre

...s de DFG...ABCD, dans lesquelles n'entrent
...*consécutifs* ABC, BCD; je désigne leur nom-

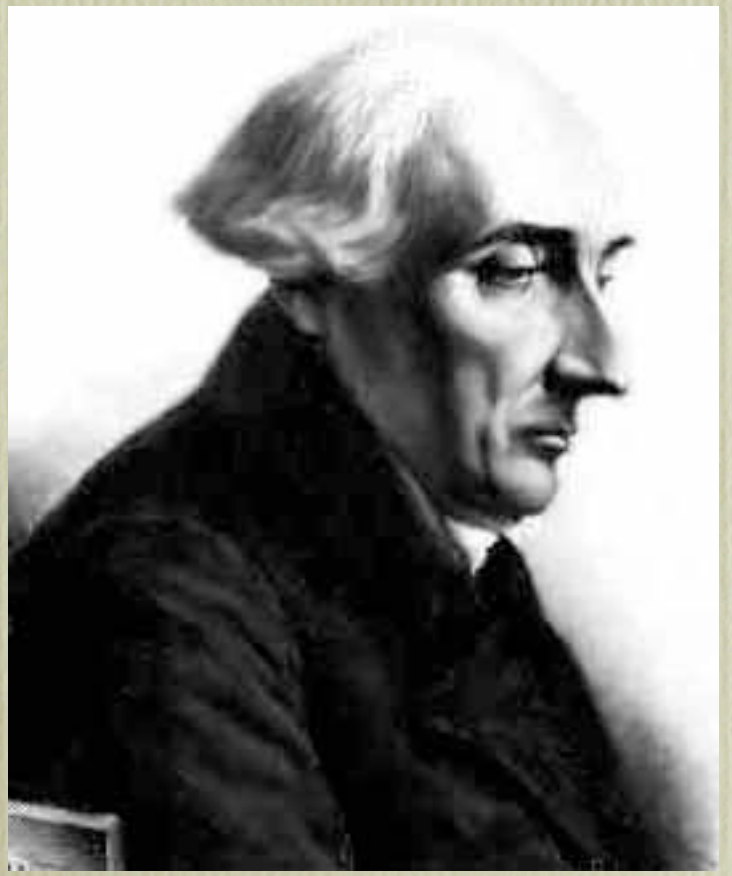
...s de EGH...BCDE, dans lesquelles n'entrent
...*consécutifs* ABC, BCD, CDE; leur nombre

. . . . . .

... décompositions du polygone de n côtés
...squelles n'entrent pas *les* $n-2$ *triangles*
..... XYZ : leur nombre est $P_{n,n-3}$.
...compositions, nous obtiendrons toutes celles

...vée depuis le mois de novembre dernier. Comme on
... me serais pas décidé à la publier, si, par une coinci-
...I. BINET n'était arrivé, de son côté, à l'équation (A).

“Lisez Euler,
dans ses écrits tout est clair, bien calculé,
ils regorgent de beaux exemples et parce
que l’on doit toujours étudier les sources”



Joseph-Louis Lagrange
1736 - 1813

AVERTISSEMENT

DE LA DEUXIÈME ÉDITION.

On a déjà plusieurs Traités de Mécanique, mais le plan de celui-ci est entièrement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème.

Cet Ouvrage aura d'ailleurs une autre utilité : il réunira et présentera sous un même point de vue les différents principes trouvés jusqu'ici pour faciliter la solution des questions de Mécanique, en montrera la liaison et la dépendance mutuelle, et mettra à portée de juger de leur justesse et de leur étendue.

Je le divise en deux Parties : la Statique ou la Théorie de l'Équilibre, et la Dynamique ou la Théorie du Mouvement; et, dans chacune de ces Parties, je traite séparément des corps solides et des fluides.

On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu ainsi le domaine.

est entièrement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème.

Cet Ouvrage aura d'ailleurs une autre utilité : il réunira et présentera sous un même point de vue les différents principes trouvés jusqu'ici pour faciliter la solution des questions de Mécanique, en montrera la liaison et la dépendance mutuelle, et mettra à portée de juger de leur justesse et de leur étendue.

Je le divise en deux Parties : la Statique ou la Théorie de l'Équilibre, et la Dynamique ou la Théorie du Mouvement; et, dans chacune de ces Parties, je traite séparément des corps solides et des fluides.

On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu ainsi le domaine.

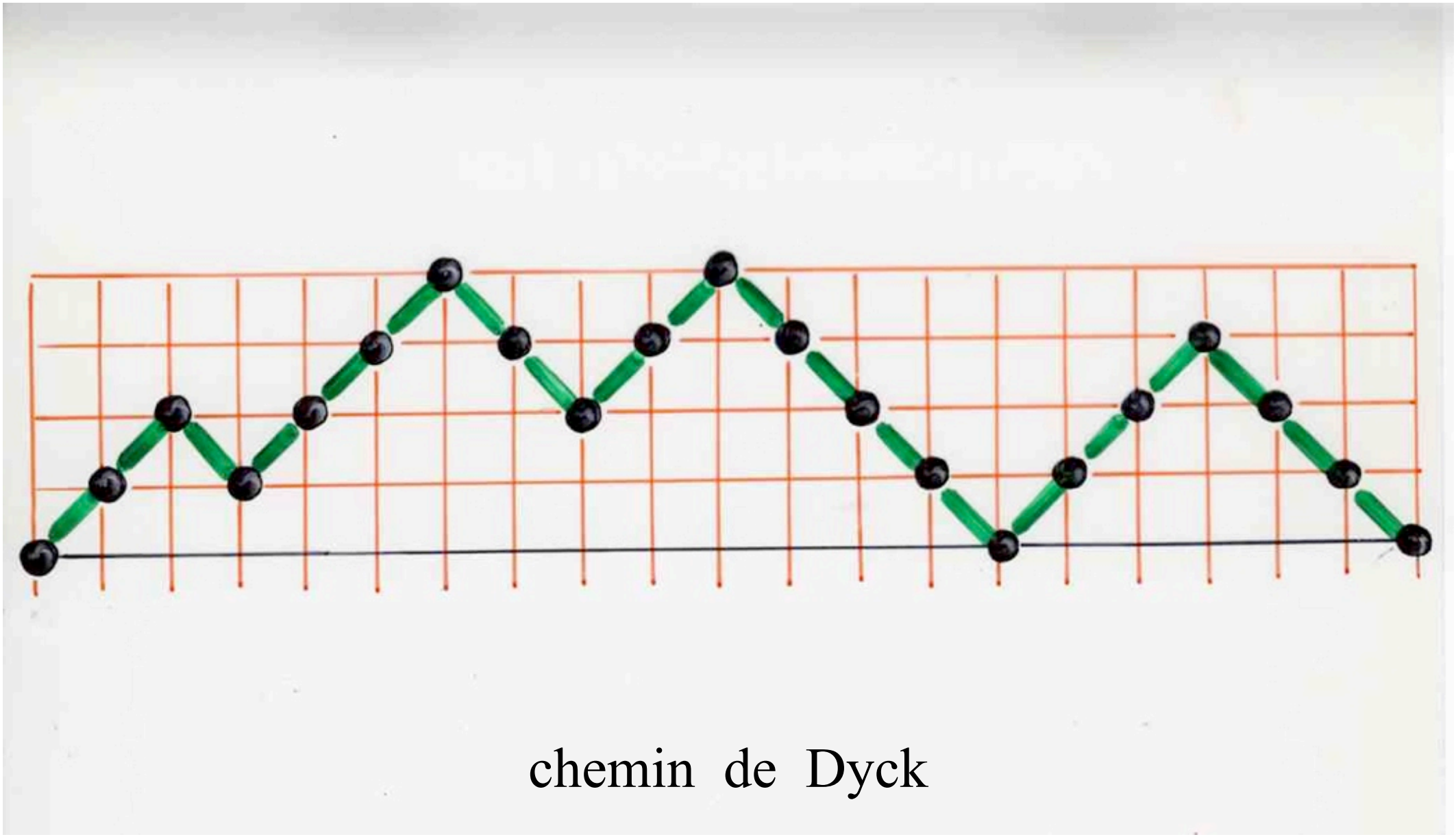
des arbres binaires ...

aux chemins de Dyck

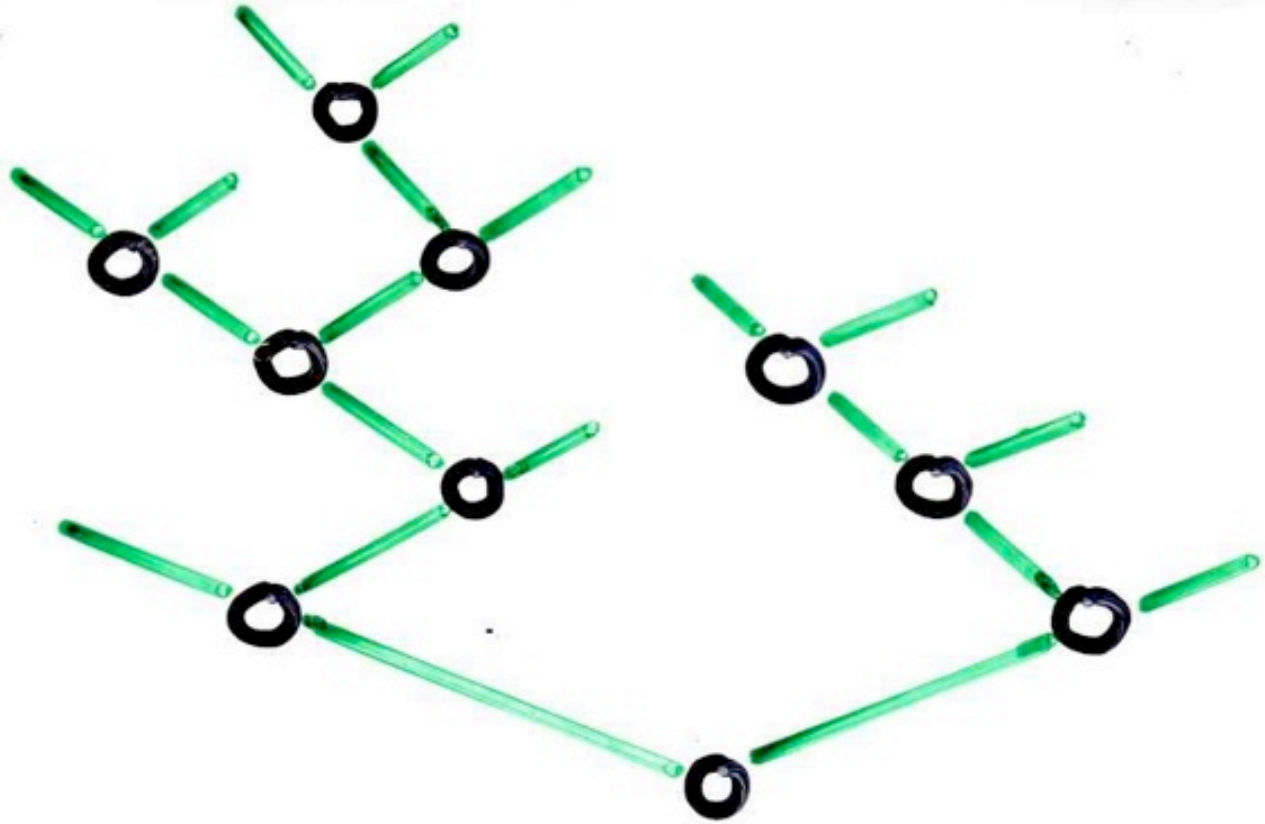
animation au violon

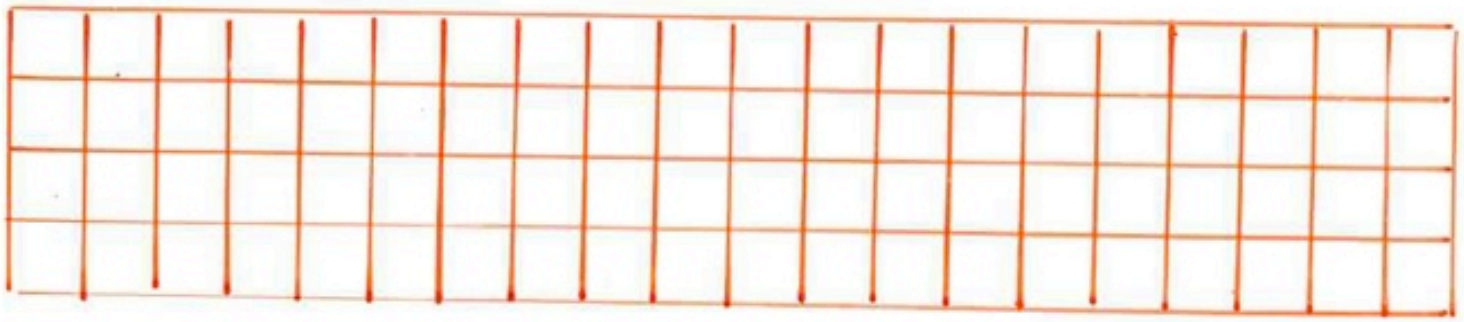
la ronde des heures

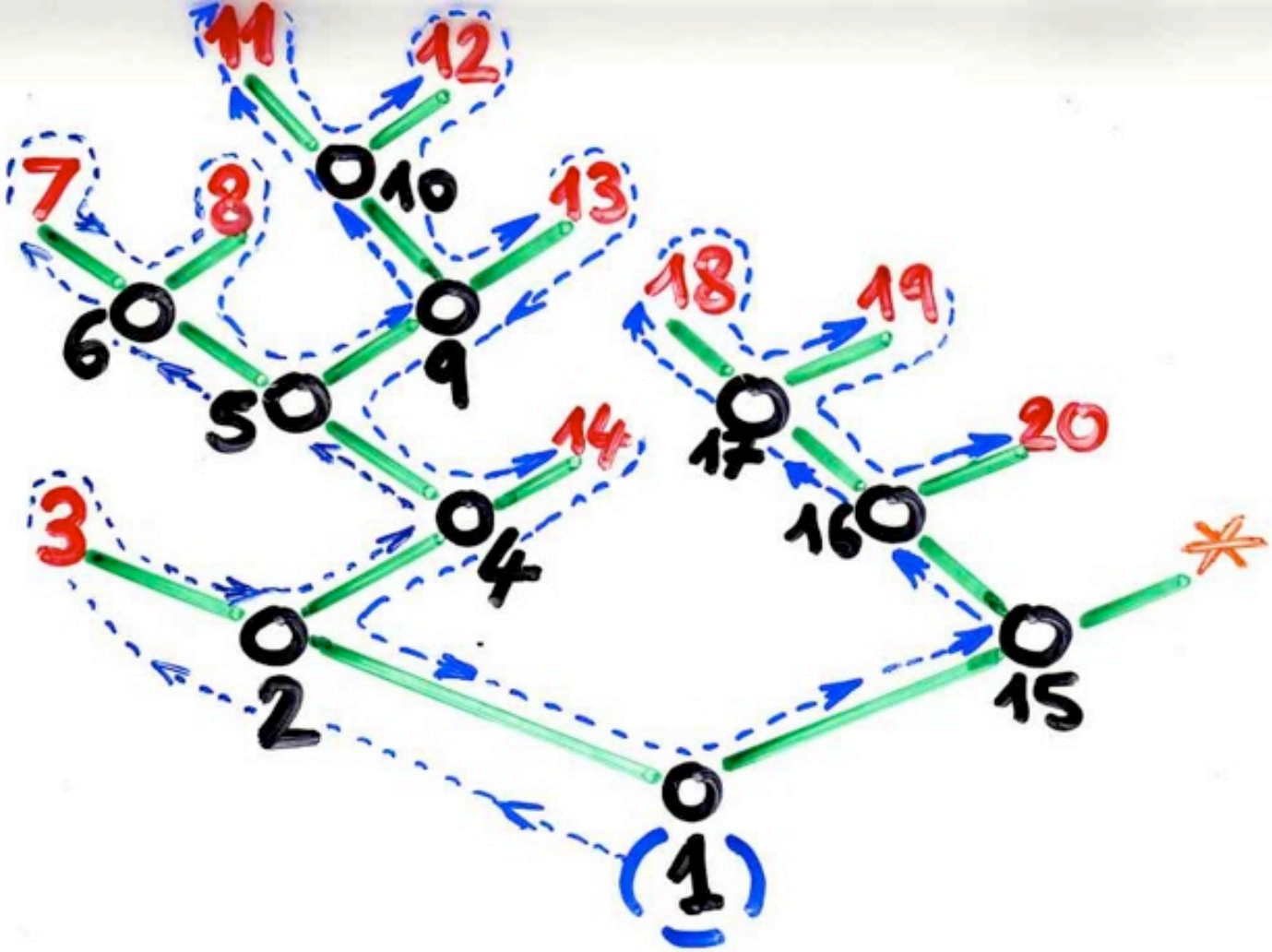
voir la vidéo sur le site: www.xavierviennot.org

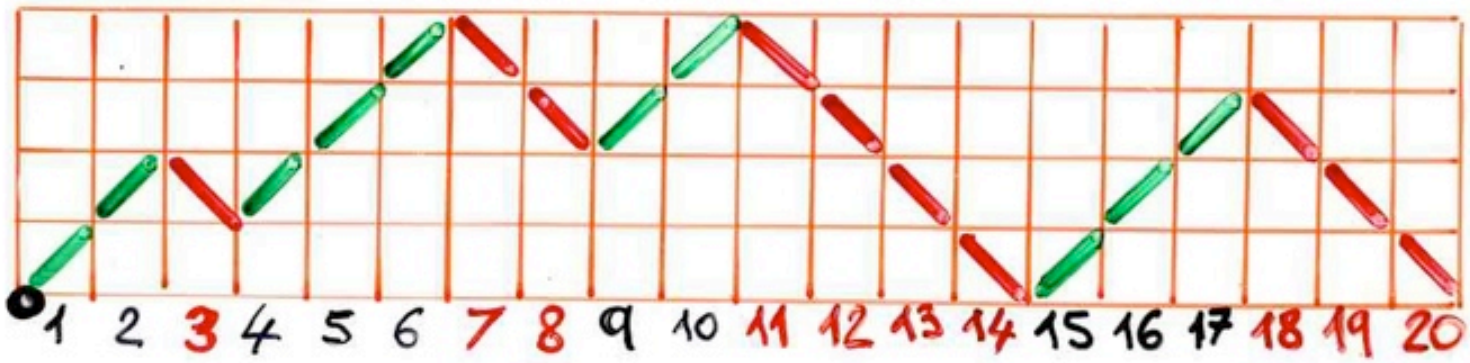


chemin de Dyck



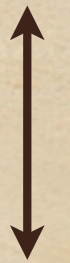



11
12
7
8
10
13
18
19
6
9
17
20
5
14
16
3
4
*
2
15
1


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

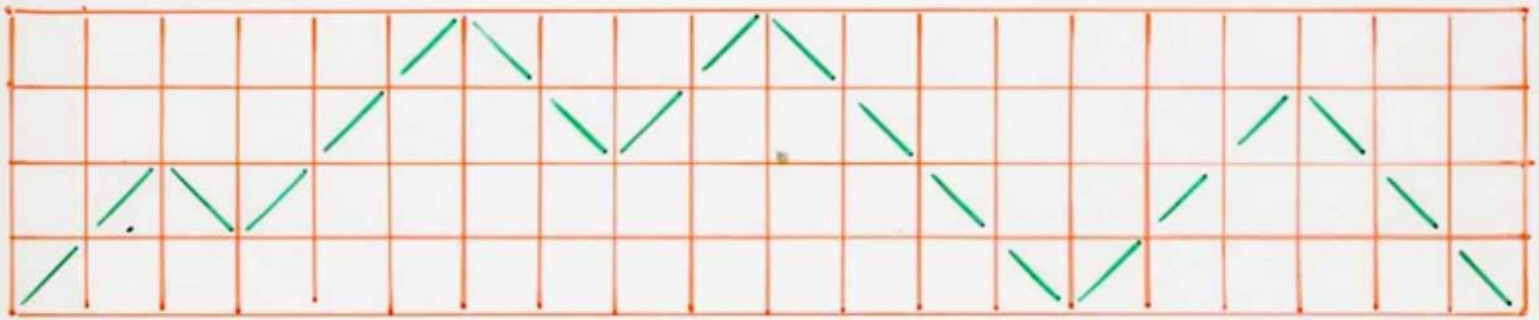
bijection réciproque

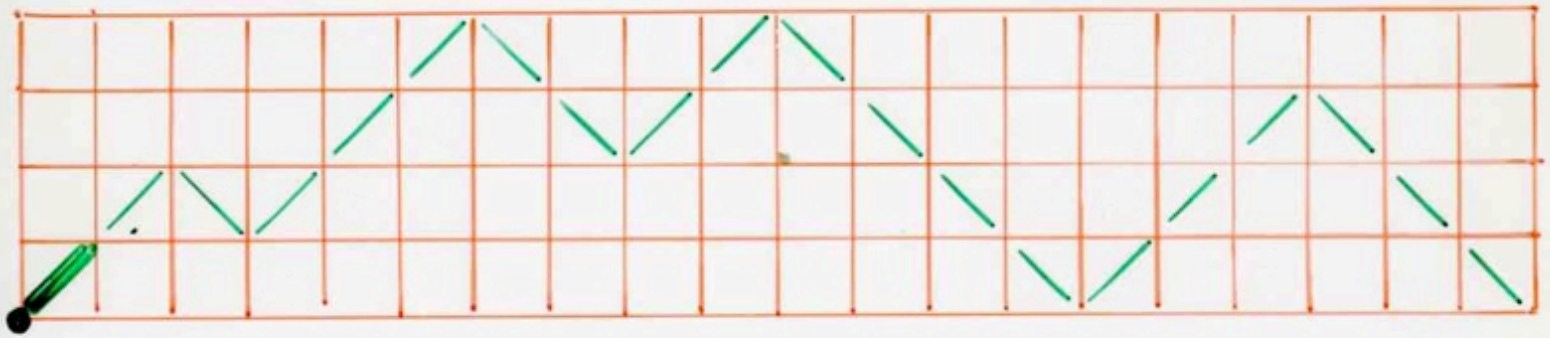
chemins de Dyck

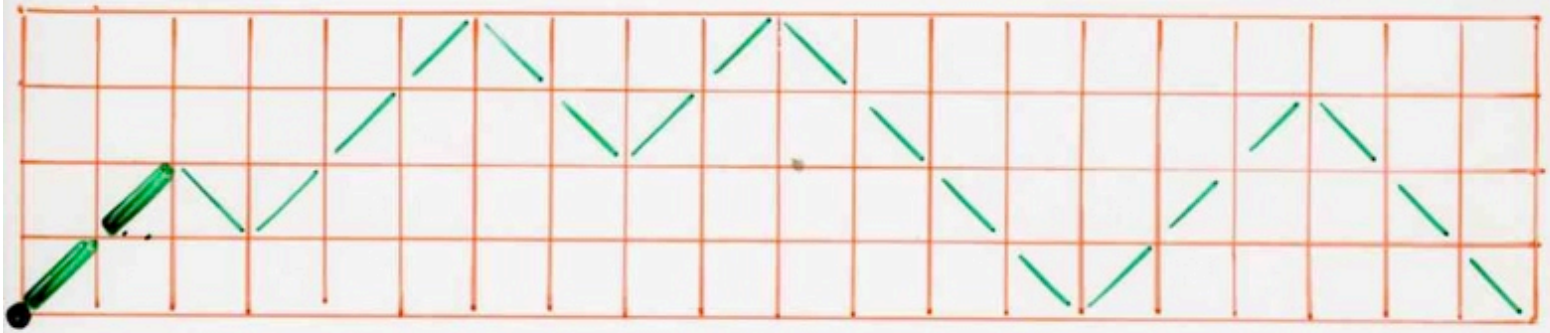


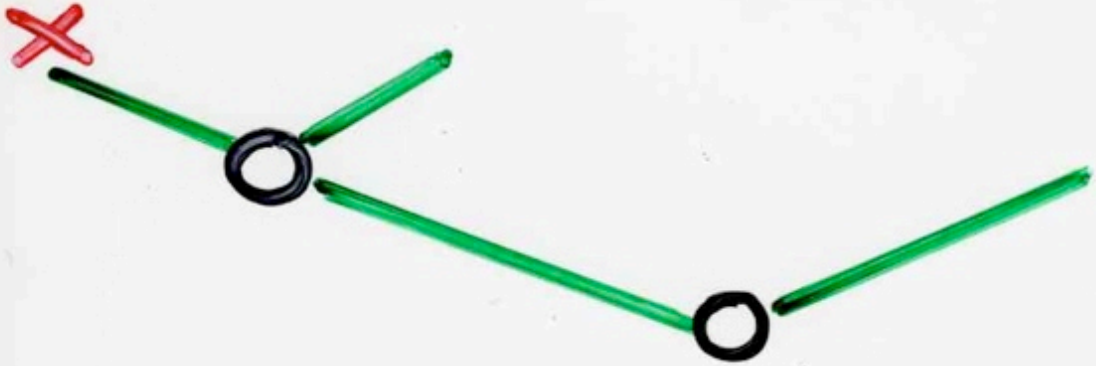
arbres binaires

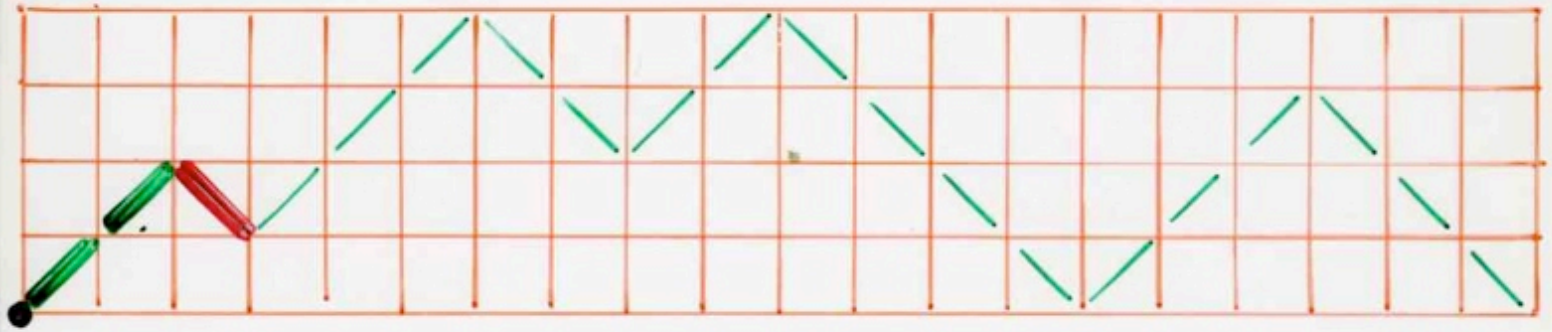
animation au violon

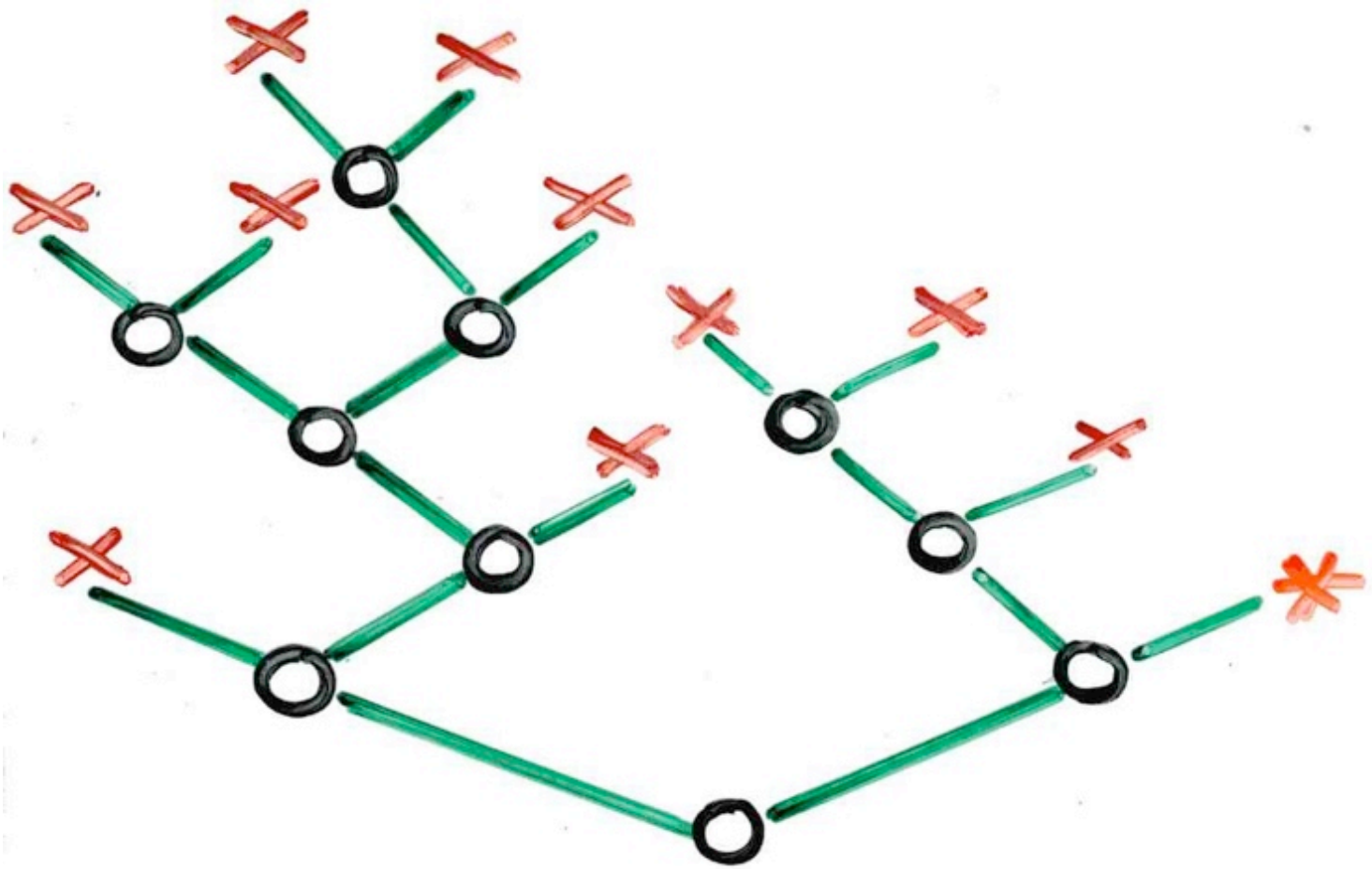


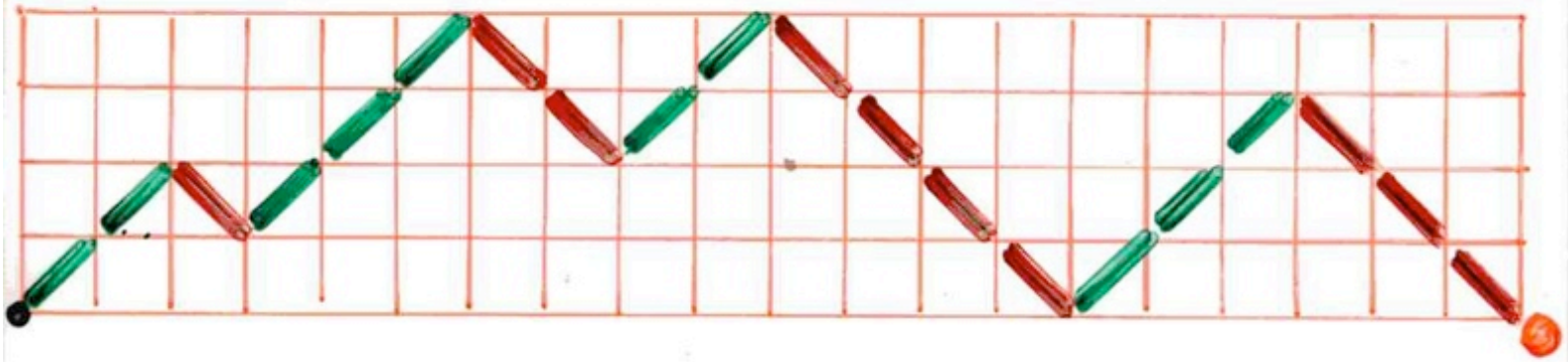






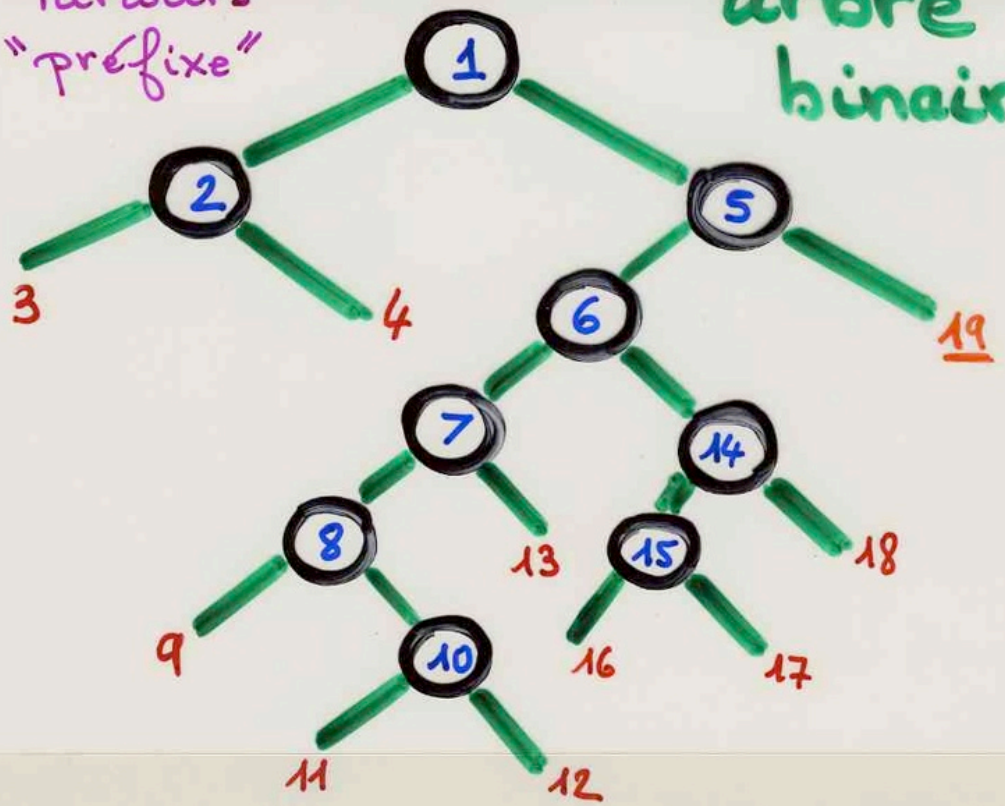




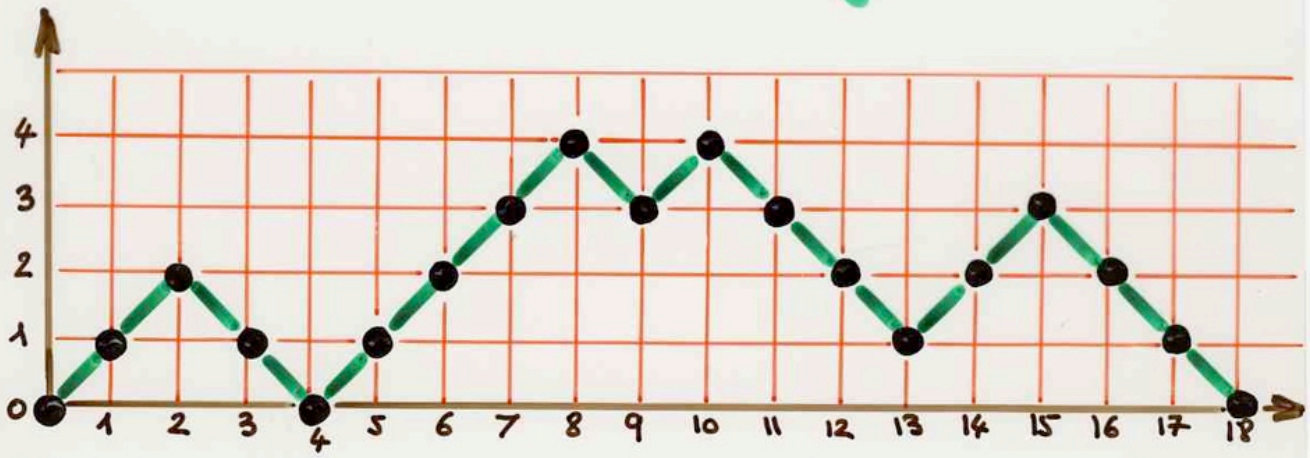


Parcours "préfixe"

arbre binaire



chemin de Dyck



identité de Touchard

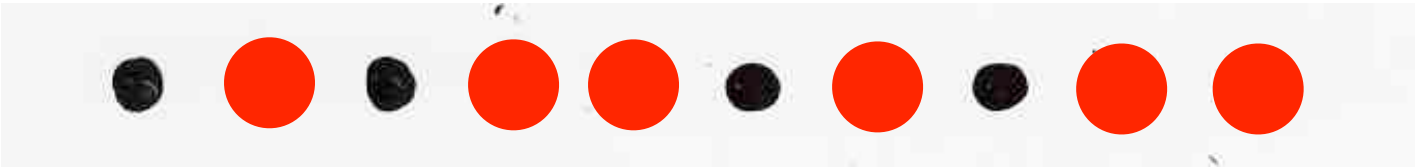
animation au violon

$$C_{n+1} = \sum_{0 \le i \le \lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} C_i \, 2^{2n-i}$$

C_i

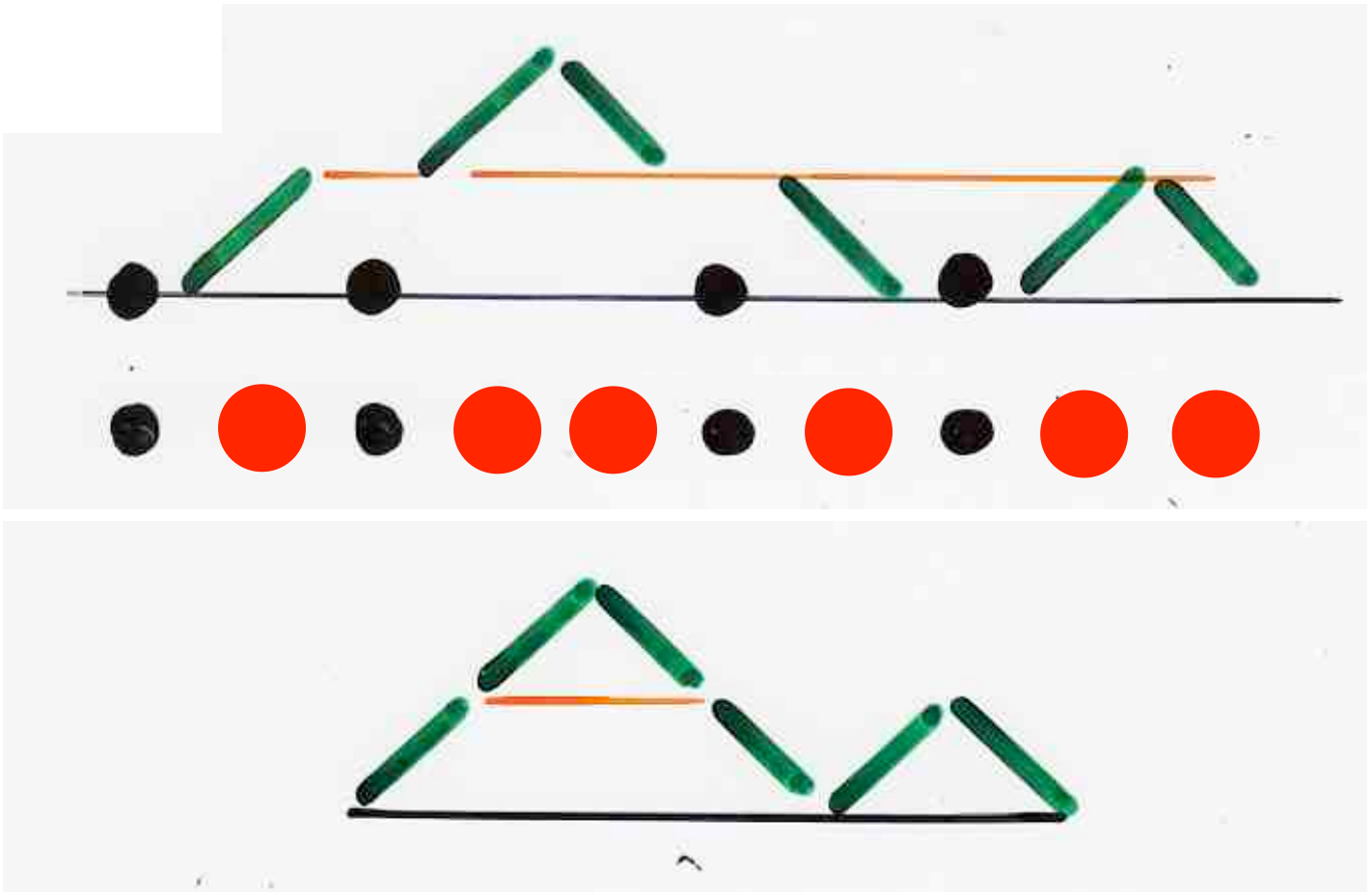
choix d'un chemin de Dyck de longueur $2i = 6$

$$\binom{n}{2i}$$

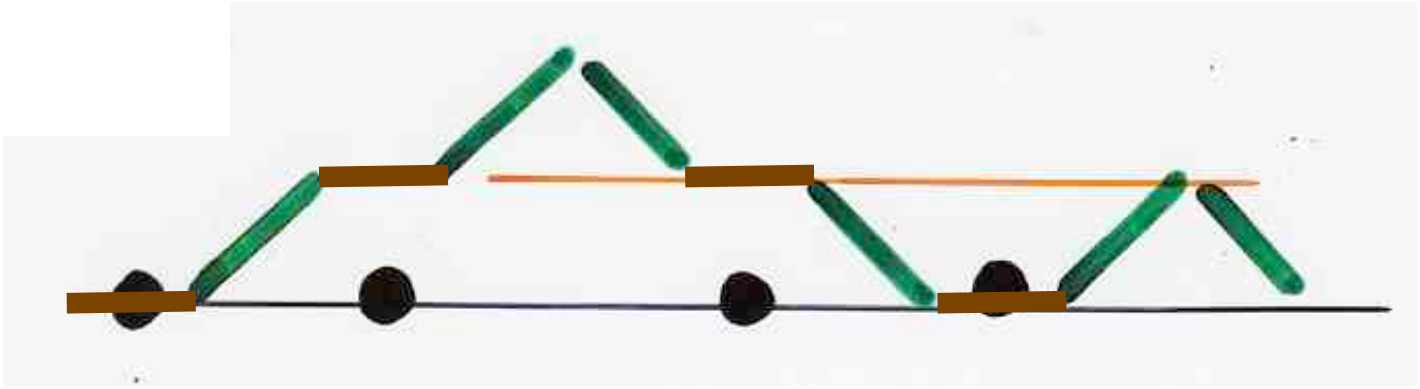


choix d'une partie à $2i$ éléments parmi $n=10$ éléments

$\binom{n}{2i}$ C_i

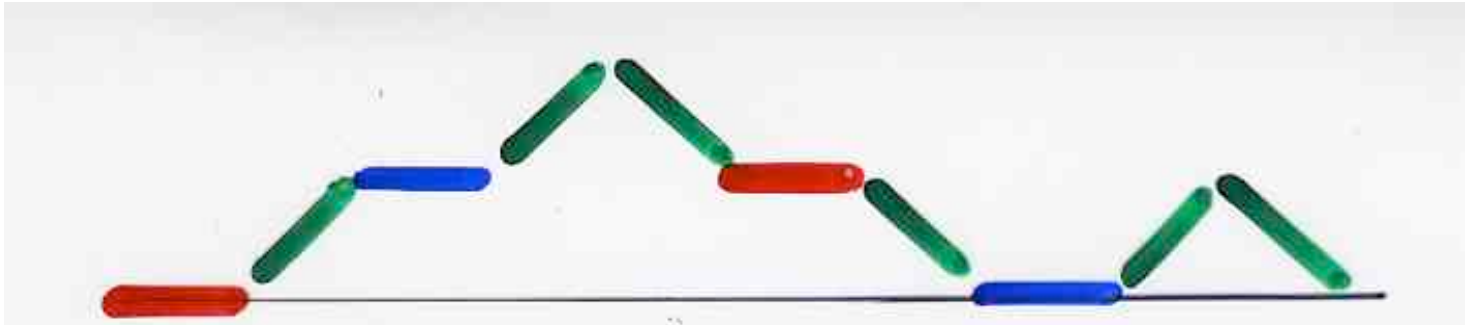


placement du chemin de Dyck
sur la partie



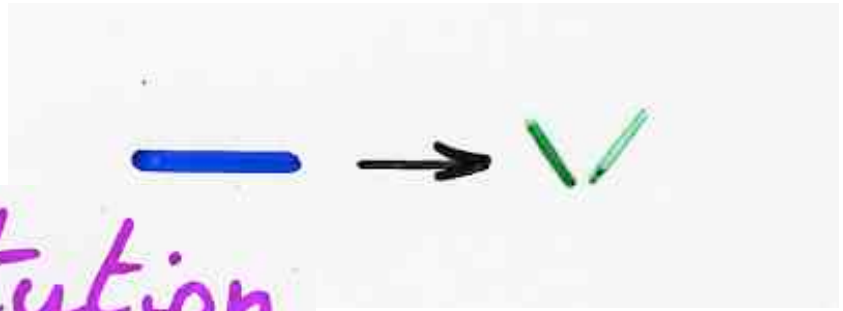
mise en place des paliers

2^{2n-i}

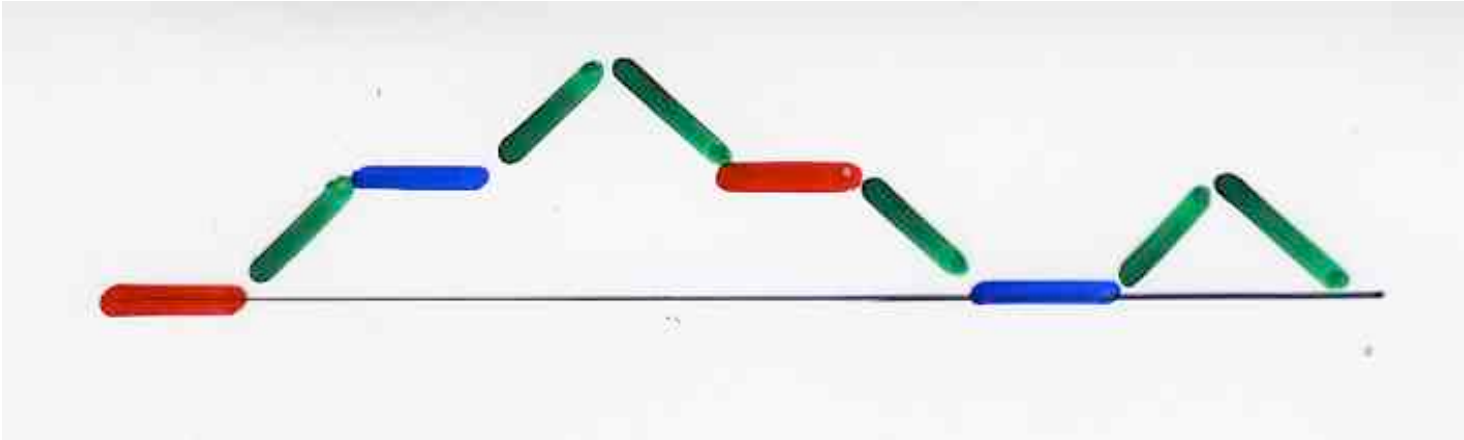


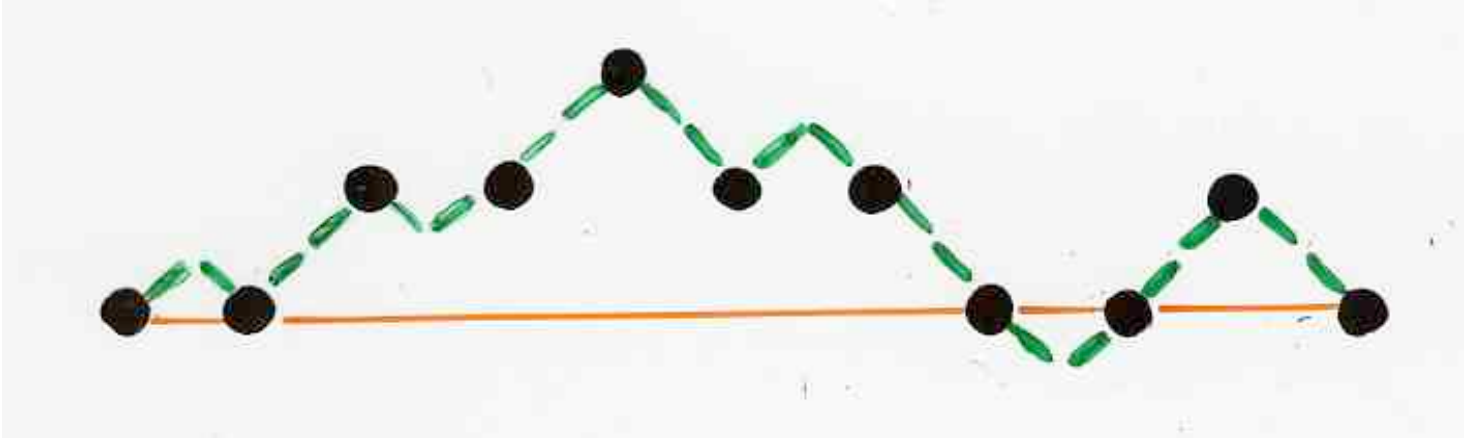
deux couleurs pour les paliers

colorier tous les paliers

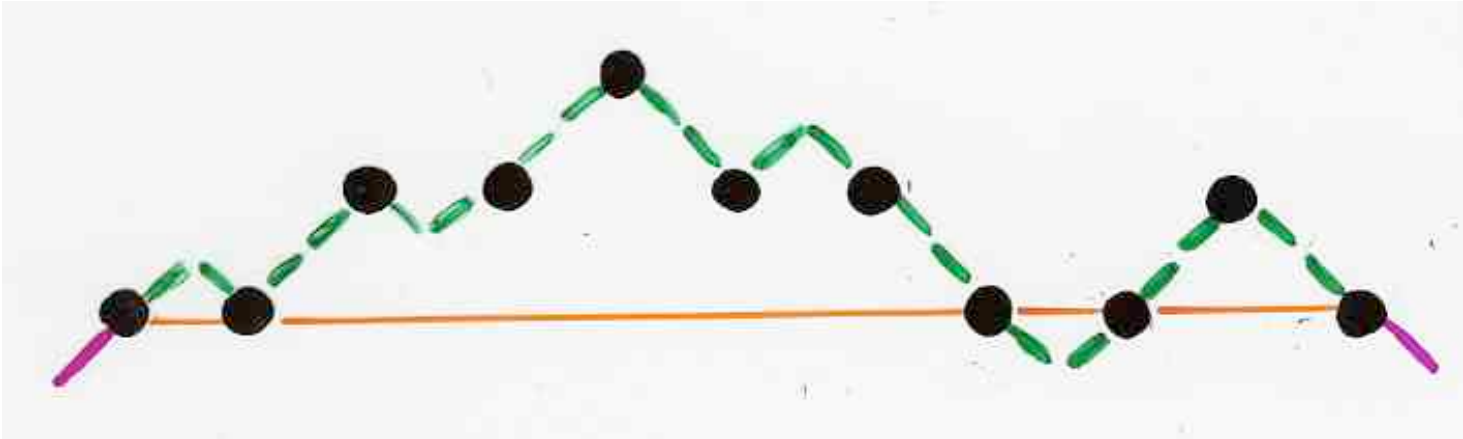


substitution





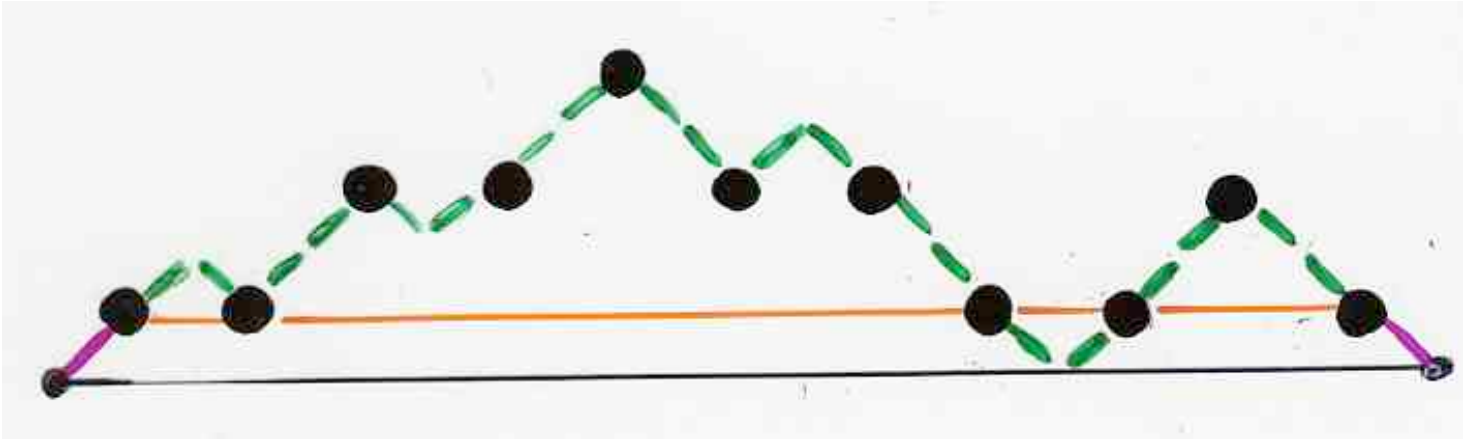
substitution sur tout le chemin



ajout au début du chemin

ajout à la fin du chemin

$$C_{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} C_i \, 2^{2n-i}$$



chemin de Dyck de longueur $2i+2$

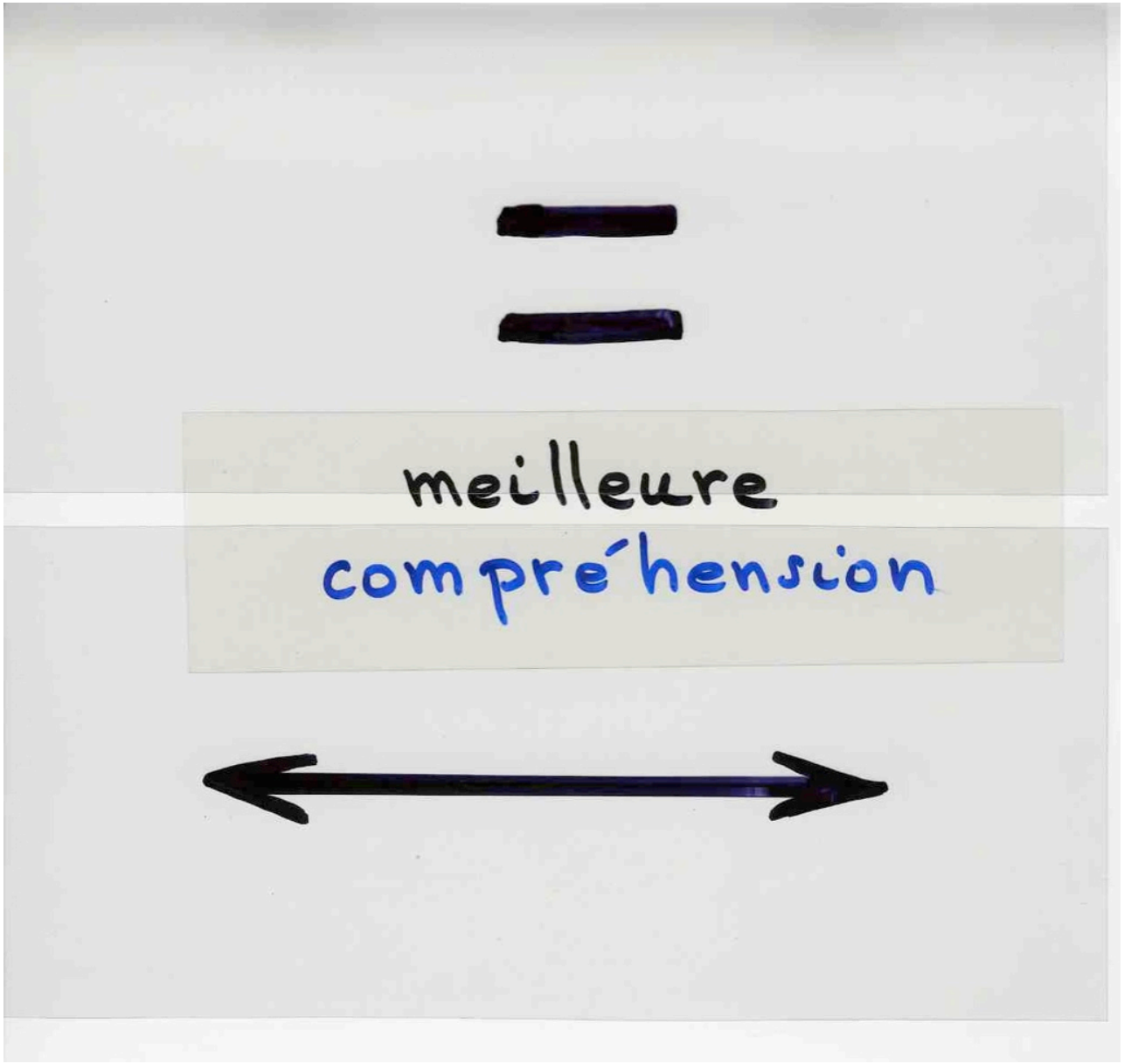
Le "paradigme bijectif"

dessiner des calculs

chaque morceau de l'identité

objet combinatoire

identités correspondances
constructions combinatoires
bijections


=
meilleure
compréhension